__למה*__ נניח $v_1,\dots,v_k \in V$ בת"ל שאינם פורשים את V.
אזי קיים $v_{k+1} \in V$ כך ש $v_1,\dots,v_k,v_{k+1}$ בת"ל.

__למה**__ (1) יהיו $w_1,\dots,w_n \in V$ תלויים לינארית. אזי קיים וקטור בסדרה הזו שהוא צירוף לינארי של וקטורים אחרים מהסדרה. (שלפניו של וקטורים לפניו).

(2) והיו $w_1,\dots,w_{n-1},w_n$ פורשים את V. נניח בנוסף ש w_n הוא צירוף לינארי של אחרים. אזי $w_1,\dots,w_k$ גם פורשים את V.

__הוכחה:__ (1) קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ שלא כולם 0 כך ש- $\lambda_1 w_1+\dots+\lambda_n w_n=\theta$
יהי k האינדקס המקסימלי כך ש $\lambda_k \neq 0$ הפרט אם $i>k$
אז $\lambda_i=0$. $\lambda_1 w_1+\dots+\underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} w_k=\theta$

$$\lambda_k w_k=-\lambda_1 w_1-\dots-\lambda_{k-1}w_{k-1}$$
$$w_k=\frac{-\lambda_1}{\lambda_k}w_1-\dots-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}w_{k-1}$$

(2) $w_n=\mu_1 w_1+\dots+\mu_{n-1}w_{n-1}$ יהי $x\in V$ כך ש $x=\lambda_1 w_1+\dots\lambda_{n-1}w_{n-1}+\lambda_n w_n$
$$=\lambda_1 w_1+\dots\lambda_{n-1}w_{n-1}+\lambda_n(\mu_1 w_1+\dots+\mu_{n-1}w_{n-1})=(\lambda_1+\lambda_n\mu_1)w_1+\dots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n\mu_{n-1})w_{n-1}$$
מש"ל. ☒

__משפט__ יהי V מ"ו ממד סופי n אזי

(1) כל סדרת וקטורים בת"ל בת n איברים היא בסיס.

(2) כל סדרת וקטורים פורשת בת n איברים היא בסיס.

__הוכחה:__ (1) $v_1,\dots,v_n$ בת"ל. צריך להוכיח שהיא פורשת את V.
נניח בשלילה שהיא אינה פורשת, לפי למה* קיים וקטור v_{n+1}
כך שאם נוסיף אותו ל- $v_1,\dots,v_n$ נקבל בת"ל, אבל זה בלתי
אפשרי כי $\dim V=n$, וזו סתירה!

(2) $w_1,\dots,w_n$ סדרה פורשת. נניח בשלילה שהיא תלויה לינארית, לפי למה**
קיים וקטור בסדרה שהוא צירוף לינארי של אחרים. ניתן לשנות את
מספור הוקטורים בסדרה ולהניח ש w_n הוא צ"ל של אחרים.
לפי למה** חלק 2, אנחנו יכולים להוריד אותו ו $w_1,\dots,w_{n-1}$
פורשים את V. כלומר V נפרש ע"י $n-1$ וקטורים. לכן כל
סדרה בת n איברים תלויה לינארית (!) ולא יכולה להיות בסיס.
כלומר $\dim V<n$ וזו סתירה!

מש"ל ☒

7.2.08 (2)

אלגברה לינארית - שיעור 6

שימושים למערכת משוואות לינאריות

נניח נתונה מערכת הומוגנית ב-n משתנים. אנו יודעים שקבוצת הפתרונות היא תת מרחב לינארי ב-$\mathbb{R}^n$. נסמן אותו $L \subset \mathbb{R}^n$. ל-L קיים בסיס $\vec{f_1}, \dots, \vec{f_k}$ כאשר $k \le n$. $k = \dim L$

הגדרה בסיס של מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית נקרא **מערכת יסודית**.

כל פתרון $\vec{V}$ של המערכת שלנו ניתן להצגה כ- $\vec{V} = t_1\vec{f_1} + \dots + t_k\vec{f_k}$. הצגה כזו היא יחידה. כל צירוף לינארי כזה הוא פתרון של המערכת.

משפט נניח שמטריצה המדורגת של מערכת הומוגנית היא בצורת מדרגות קנונית. אזי $\dim$ של מרחב הפתרונות שווה למספר המשתנים החופשיים. (אם אין כאלו אז קיים רק הפתרון הטריוויאלי).

דוגמאות:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-3s+t, s, -t, t) = \left\{\begin{array}{l} x_1 = -3x_2 + x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{array}\right.$$

$$= s(-3, 1, 0, 0) + t(1, 0, -1, 1)$$

הוקטורים $\underbrace{(-3,1,0,0)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,-1,1)}_{V_2}$ הם בסיס של מרחב הפתרונות.

$$\lambda_1 \vec{V_1} + \lambda_2 \vec{V_2} = \vec{0}$$

$$(*, \lambda_1, *, \lambda_2) = (0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ כלומר הוקטורים האלו הם בת"ל.

נסתכל בקואורדינטות של משתנים חופשיים באופן כללי:

$(*, *, 1, 0, 0)$

$(*, *, 0, 1, 0)$

$(*, *, 0, 0, 1)$

7.2.08 (3)

אלגברה לינארית - שיעור 6

שימוש למערכות לא הומוגניות

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

יהי $\vec{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ פתרון של (*).

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

טענה: יהי $\vec{v}$ פתרון כלשהו של (**) אזי $\vec{\xi}+\vec{v}$ פתרון של (*).

להפך: לכל פתרון $\vec{\xi}'$ קיים יחיד פתרון $\vec{v}$ של (**) כך ש $\vec{\xi}'=\vec{\xi}+\vec{v}$

נסמן ב- L את מרחב הפתרונות של (**), $L\subset\mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי.
הטענה אומרת שקבוצת הפתרונות של המערכת (*) הוא $\vec{\xi}+L=\{\vec{\xi}+\vec{v}\mid \vec{v}\in L\}$

הוכחה: נניח $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)$ פתרון של (**). נראה כי $\vec{\xi}+\vec{v}$ פתרון של (*).

$$\begin{cases} a_{11}(\xi_1+v_1)+\dots+a_{1n}(\xi_n+v_n)\overset{?}{=}b_1 \\ \dots \\ a_{m1}(\xi_1+v_1)+\dots+a_{mn}(\xi_n+v_n)\overset{?}{=}b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{(a_{11}\xi_1+\dots+a_{1n}\xi_n)}_{b_1 \text{ פתרון מערכת } *}+\underbrace{(a_{11}v_1+\dots+a_{1n}v_n)}_{0 \text{ פתרון מערכת } **}\overset{?}{=}b_1 \quad \checkmark \\ \dots \\ (a_{m1}\xi_1+\dots+a_{mn}\xi_n)+(a_{m1}v_1+\dots+a_{mn}v_n)=b_m \quad \checkmark \end{cases}$$

כיוון שני: יהי $\vec{\xi}'$ פתרון של (*). נראה כי $\vec{v}=\vec{\xi}'-\vec{\xi}$ פתרון של (**).

$$\begin{cases} (\xi_1'-\xi_1)a_{11}+\dots+a_{1n}(\xi_n'-\xi_n)\overset{?}{=}0 \\ \dots \\ (\xi_1'-\xi_1)a_{m1}+\dots+a_{mn}(\xi_n'-\xi_n)\overset{?}{=}0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \underbrace{(a_{11}\xi_1'+\dots+a_{1n}\xi_n')}_{b_1}-\underbrace{(a_{11}\xi_1+\dots+a_{1n}\xi_n)}_{b_1}\overset{?}{=}0 \quad \checkmark \\ \dots \\ \underbrace{(a_{m1}\xi_1'+\dots+a_{mn}\xi_n')}_{b_m}-\underbrace{(a_{m1}\xi_1+\dots+a_{mn}\xi_n)}_{b_m}\overset{?}{=}0 \quad \checkmark \end{cases}$$

אז מה זה שימושי? בסיס $\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\in L$ $\quad \vec{\xi}+L$

כדרך לתאר את קב' הפתרונות $\{\vec{\xi}+t_1\vec{f}_1+\dots+t_n\vec{f}_n \mid t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}\}$

מטריצות

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{m1} & \cdots\cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

__סימונים:__ $A_{m\times n}$ או $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

$(\alpha_{ij})_{m\times n}$ $\qquad (\alpha_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

(α_{ij})

$(A)_{ij}$ - איבר במקום ij.

__הגדרה:__ שתי מטריצות A, B נקראות שוות אם יש להן את אותו הגודל וגם
לכל i,j: $A_{ij}=B_{ij}$;

__דוגמאות:__

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}_{1\times 2} \neq \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{2\times 1}$ $\qquad$ (3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 4 & 0\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\qquad$ (4) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$

__הגדרה:__ יהיו $\underset{m\times n}{A}, \underset{m\times n}{B}$ מטריצות מאותו גודל.
הסכום שלהם שמסומן כ- $A+B$ היא מטריצה מאותו גודל $m\times n$ שמוגדרת:

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$

__דוגמה:__

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 2\\-1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & -3\end{bmatrix}$$

__הגדרה:__ תהי A מטריצה $m\times n$, $\lambda\in\mathbb{R}$. כפל של λ ב- A. היא מטריצה $m\times n$
שמסומנת λA ומוגדרת

$$(\lambda A)_{ij}=\lambda\cdot(A)_{ij}$$

__דוגמה:__

$$-3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -6\\-9 & -12\end{bmatrix}$$

__סימון:__ נסמן את קבוצת המטריצות הממשיות $m\times n$ ב- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ או $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

__משפט:__ עם הפעולות שהגדרנו $Mat(\mathbb{R})$ היא מ"ו.

__הוכחה:__ $A+(B+C) \overset{?}{=} (A+B)+C$ - יש להן אותו גודל $m\times n$.

$$\big((A+B)+C\big)_{ij} \overset{?}{=} \big(A+(B+C)\big)_{ij}$$

$$\big((A+B)+C\big)_{ij} = (A+B)_{ij}+C_{ij} = (A_{ij}+B_{ij})+C_{ij}$$

$$\big(A+(B+C)\big)_{ij} = A_{ij}+(B+C)_{ij} = A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij})$$

אלגברה לינארית - שיעור 6

המשך...

האיבר הניטרלי ב- $Mat(\mathbb{R})$: $O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

האיבר הנגדי $A = (\alpha_{ij})$

$-A = (-\alpha_{ij})$

שאר התכונות כתרגיל.