תרגול בדבר לינאריות - שעור 5

V מ"ו

(1) $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת פורשת אם לכל $x \in V$

$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

(2) $v_1, \dots, v_n \in V$ תלויה לינארית אם קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ כשלא כולם 0 כך $\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n = \theta$.

(3) $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת בסיס אם היא פורשת וגם בלתי תלויה לינארית.

<u>דוגמאות מהשיעור הקודם</u>

$V = \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \\ e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \\ e_i = \{0 \dots 1 \dots 0\} \\ e_n = (0, \dots 0, 1) \end{cases}$$

$e_1, \dots e_n$ בסיס ל $\mathbb{R}^n$

הבסיס הזה נקרא בסיס סטנדרטי (של $\mathbb{R}^n$).

<u>דוגמאות נוספות</u>

(1) $V = \mathbb{R}^1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$

v_1, v_2 - פורשת? כן! כי אם יש לנו $x \in \mathbb{R}^1$ ניתן להציג אותו $x = x \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

v_1, v_2 - בת"ל? לא! כי $3v_1 - v_2 = \vec{0}$.

v_2 - בסיס ל $\mathbb{R}^1$ $x = \frac{x}{3} \cdot v_2$

הוא בת"ל כיוון $\lambda \cdot v_2 = \vec{0} \Leftarrow \lambda = 0$.

(2) V

$v_1, v_2, \dots, \theta, v_m \dots$ - כל סדרה תלויה לינארית כי $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot \theta + 0 \cdot v_m \dots = \theta$.

חשוב להבין שכל סדרה המכילה θ הוא תלויה לינארית. (כי $1 \cdot \theta = \theta$)

(3) נניח שהסדרה $v_1, \dots, v_n$ בת"ל. מהו שכל תת סדרה שלה גם בת"ל.

לפחות בשביל המימון נניח שתת הסדרה הזו $v_1 \dots v_m$ (כאשר $m < n$). נניח בשלילה שזו סדרה תלויה לינארית. כלומר $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_0 = \theta$ כאשר לא כולם λ_i שווים לאפס.

נתבונן $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = \theta$ קיבלנו שגם הסדרה המקורית הזו לא בת"ל וזו סתירה.

(4) $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (2, 1)$

<u>בת"ל?</u> $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$

$\lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (2, 1) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

המשך...

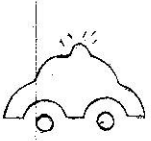
$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2\\0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow \frac{R_2}{-3}}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{matrix}\Rightarrow \underline{\text{בת"ל}}\ v_1,v_2$$

הוא גם פורס! כן! כי ב- $\mathbb{R}^n$ כל סדרה באורך n גם פורסת, כיוון שמוכל לא תלוי, נשתמש בת"ל:

$$\vec{x}=\underline{\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2}\qquad \vec{x}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$$

$$(a,b)=(\lambda_1+2\lambda_2,\ 2\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=a\\ 2\lambda_1+\lambda_2=b\end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&a\\2&1&b\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&-3&b-2a\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftarrow\frac{R_2}{-3}}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&1&\frac{2a-b}{3}\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&a-\frac{2}{3}(2a-b)\\0&1&\frac{2a-b}{3}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}a\\ \lambda_2=\frac{2a-b}{3}\end{cases}\Rightarrow \vec{x}=\frac{2b-a}{3}\vec{v_1}+\frac{2a-b}{3}\vec{v_2}$$

(4) **טענה:** $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V אז לכל $x\in V$ קיימת וחידה הצגה כצירוף לינארי של הוקטורים האלו.

הוכחה: קיום - ברור.

יחידות: יהי $x\in V$

$$x=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n=\mu_1 v_1+\dots+\mu_n v_n$$

בל"ג

$$\begin{cases}\lambda_1=\mu\\ \lambda_n=\mu\end{cases}$$

$$(\lambda_1-\mu_1)v_1+\dots+(\lambda_n-\mu_n)v_n=\theta$$

$v_1,\dots,v_n$ בת"ל $\Leftarrow$ $\begin{cases}\lambda_1-\mu_1=0\\ \vdots\\ \lambda_n-\mu_n=0\end{cases}$

הגדרה: מ"ו V נקרא - **נוצר סופית** (מאוד סו"ב) אם קיימת סדרת וקטורים ב- V שפורשת אותו.

דוגמאות: (1) $V=\mathbb{R}^n$ הוא מרחב נוצר סופית כי הסדרה $e_1,\dots,e_n$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathbb{R}^{[a,b]}$ - לא נוצר סופית $\quad \mathbb{R}^{[a,b]}=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\}$

טענה: נניח שמ"ו V נפרס ע"י סדרה בת m וקטורים, אז כל סדרה בת $>n$ וקטורים היא תלויה לינארית.

סימונים: $v_1+\dots+v_n=\sum_{i=1}^{n}v_i$

$$\begin{bmatrix}v_{11}&v_{12}&\dots&v_{1n}\\v_{21}&v_{22}&\dots&v_{2n}\\ \vdots&&&\\v_{m1}&v_{m2}&\dots&v_{mn}\end{bmatrix}\leftarrow \sum_i\sum_j v_{ij}=\sum_j\sum_i v_{ij}=\sum_{ij}v_{ij}$$

5.2.08 (3)

שאלה כתה לינארית - שיעור 5

הוכחה: יהיו ש $V_1,\dots,V_n$ פורשים את V (*)

$W_1,\dots,W_m$, $n<m$

לא: $W_1,\dots,W_m$ תלויה לינארית כלומר קיים $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ שקיימים

לא כולם אפס כך ש $\sum_{i=1}^{m} = \lambda_1W_1+\dots+\lambda_mW_m=\theta$ $\qquad W_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}V_j$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}V_j\right)=\theta$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\lambda_iV_j)\right)=\theta$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}\lambda_iV_j)\right)=\theta$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i\right)V_j=\theta$$

מספיק להראות כי קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ לא כולם 0 כך ש $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i=0$ לכל $j=1,\dots,n$

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+a_{21}\lambda_2+\dots+a_{m1}\lambda_m=0 & j=1\\ a_{12}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\dots+a_{m2}\lambda_m=0 & j=2\\ a_{1n}\lambda_1+a_{2n}\lambda_2+\dots+a_{nm}\lambda_m=0 & j=n\end{cases}$$

בעיה מערכת הומוגנית עם n משוואות ו m משתנים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ $m>n$ $\Leftarrow$ יש פתרון לא טריוויאלי.

נשלם

משפט: V מ"ו נוצר סופית תהי $V_1,\dots,V_k$ בת"ל אז ניתן להשלים אותה לבסיס של V. בפרט בכל מ"ו נוצר סופית קיים בסיס.

למה* V מ"ו תהי $V_1,\dots,V_k$ בת"ל **שלא פורשת** את V, אזי קיים $V_{k+1}\in V$ כך ש $V_1,\dots,V_k,V_{k+1}$ בת"ל.

הוכחת הלמה: נניח שהסדרה $V_1,\dots,V_k$ לא פורשת את V קיים וקטור שלא ניתן להציגו כצירוף לינארי. נשלבה נמצא את הוקטור הזה ב V_{k+1} ונראה ש $V_1,\dots,V_k,V_{k+1}$ בת"ל.

נניח $\lambda_1V_1+\dots+\lambda_kV_k+\lambda_{k+1}V_{k+1}=\theta$

(א) $\lambda_{k+1}=0$ $\qquad$ (ב) $\lambda_{k+1}\neq0$

(א) $\lambda_1V_1+\dots+\lambda_kV_k=\theta$ אז לפי $V_1,\dots,V_k$ בת"ל $\Leftarrow$ $\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$

לכן $\lambda_1=\dots=\lambda_k=\lambda_{k+1}=0$.

(ב) לא נכון $\lambda_{k+1}V_{k+1}=-\lambda_1V_1-\dots-\lambda_kV_k$

$V_{k+1}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}V_1-\dots-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}V_k$ $\Leftarrow$ סתירה לבחירה של V_{k+1} **נשלם**

אלגברה לינארית - שיעור 5

הוכחה של המשפט: $v_1, \dots, v_k$ בת"ל (שיעור לפני הסדרה הריקה).

אם הוא פורשת אז הוא בסיס, ולכן מהלכים.

אם הוא לא פורשת, לפי למה * קיים $v_{k+1} \in V$ כך ש- $v_1, \dots, v_{k+1}$ בת"ל.
אם הוא פורשת סיימנו. אחרת נבחר v_{k+2} כך ש $v_1, \dots, v_{k+2}$ בת"ל.

כך נמשיך עד לרגע בו לא פורשת. נלכן ש- V נוצר סופית, ונקבל n וקטורים. לפי המשפט שהוכחנו, כל סדרה עם יותר מ- n איברים - הוא תלוי לינארית. לכן, נגיע תוך לכל איברי $n-k$ לדרגים.

מש"ל ☒

משפט V נוצר סופית אזי כל בסיס יש אותו מספר איברים.

הגדרה: המספר הזה נקרא **מימד** של V ומסומן $\dim V$.

הוכחה: $\begin{cases} v_1, \dots, v_n \\ v_1, \dots, v_m \end{cases}$ שני בסיסים, צריך להראות ש- $m=n$.

$\begin{cases} v_1 \dots v_n & \text{פורשים את } V \\ v_1 \dots v_m & \text{בת"ל} \end{cases} \Leftarrow m \le n$ באופן סימטרי $n \le m$ מש"ל ☒

דוגמאות: (1) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(2) $V = \{\theta\}$ $\dim V = 0$.

תרגיל: V נוצר סופית אז $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{\theta\}$

משפט: V נוצר סופית, יהי $W < V$ תת מרחב לינארי אזי W נוצר סופית ו $\dim W \le \dim V$.

הוכחה: נסמן $n = \dim V$ אז כל סדרה בת $n+1$ וקטורים ב- V היא תלויה לינארית. נבחר ב- W סדרה בת"ל הכי ארוכה.

$w_1, \dots, w_m \in W$ $m \le n$.

נוכיח שזה בסיס. אחרת אם $w_1, \dots, w_m$ לא פורשת את W.
לפי למה * קיים $w_{m+1} \in W$ כך ש $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}$ בת"ל - סתירה.

לכן $w_1, \dots, w_m$ פורשת את W. ובפרט מתקיים $\dim W = m$.
$m \le n \Rightarrow \dim W \le \dim V$

מש"ל ☒

מסקנה V נוצר סופית

$W < V$ תת מרחב לינארי.

אזי: $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$ אם ורק אם

מומלץ לעשות!