# אלגברה לינארית 1 - שיעור 4

<u>משפט:</u> קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות <u>הומוגנית</u> ב-n משתנים היא תת-מרחב לינארי ב-$\mathbb{R}^n$

<u>הוכחה:</u> $\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ $\vec{0}=(0,\dots,0)$ - פתרון (מקיים תנאי ראשון כי יש לפחות פתרון אחד).

נניח $\vec{c}=(c_1,\dots,c_n)$ - פתרון. צ"ל שלכל $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda\vec{c}=(\lambda c_1,\dots,\lambda c_n)$ הוא גם פתרון.

<u>נתון:</u> $\begin{cases} a_{11}c_1+\dots+a_{1n}c_n=0 \\ \\ a_{m1}c_1+\dots+a_{mn}c_n=0\end{cases}$ צ"ל $\begin{cases} a_{11}\lambda c_1+\dots+a_{1n}\lambda c_n=0 \\ \dots \\ a_{m1}\lambda c_1+\dots+a_{mn}\lambda c_n=0\end{cases}$

מכפיל כל שוויון ב-$\lambda$ ⇐ הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר

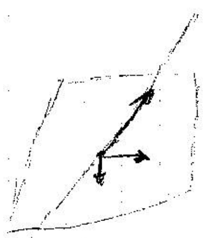
נותר לבדוק כי קבוצת הפתרונות סגורה תחת החיבור. נניח $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$, $\vec{c}=(c_1,\dots,c_n)$ - שני פתרונות.

<u>צ"ל</u> $\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\dots,b_n+c_n)$ הוא גם פתרון.

<u>נתון:</u> $\begin{cases} a_{11}b_1+\dots+a_{1n}b_n=0 \\ \dots \\ a_{m1}b_1+\dots+a_{mn}b_n=0\end{cases}$ <u>וגם</u> $\begin{cases} a_{11}c_1+\dots+a_{1n}c_n=0 \\ \dots \\ a_{m1}c_1+\dots+a_{mn}c_n=0\end{cases}$

<u>צ"ל</u> $\begin{cases} a_{11}(b_1+c_1)+\dots+a_{1n}(b_n+c_n)=0 \\ \dots \\ a_{m1}(b_1+c_1)+\dots+a_{mn}(b_n+c_n)=0\end{cases}$ ⇐ המערכת הזו מתקבלת מהשוויונות הנתונים ע"י הוספה של שוויונות מתאימים לכן היא סגורה גם תחת חיבור

מכאן, שקבוצת הפתרונות היא תת מרחב לינארי. <u>מש"ל</u> ☒.



ישר נפרס ע"י וקטור אחד, כל שאר הוקטורים שמקיימים את הישר, הם למעשה כפולה של הוקטור המקורי.

מישור נפרס לפחות ע"י 2 וקטורים ולכן הוא "יותר גדול".

מספר הוקטורים המגדירים נקרא מימד ולכן ניתן להגיד שלמישור יש מימד יותר גדול מהישר.

## <u>מרחבים וקטורים (לינאריים)</u>

<u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ זאת קבוצה $V$ עם הפונקציות:

$\varphi: V\times V\to V$ וגם $\psi: \mathbb{R}\times V\to V$

<u>מכפלה קרטזית</u> של הקבוצות $B,A$ $(A\times B)$ היא אוסף של כל הזוגות הסדורים של האיבר הראשון מ-$A$, והשני מ-$B$ $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

31.1.08 (2)

אלגברה לינארית - שיעור 4

המשך...

$\varphi: V\times V\to V$ - חיבור, סימון מקובל $\varphi((x,y))=x+y$

$\psi: \mathbb{R}\times V\to V$ - כפל בסקלר, סימון $\psi((\lambda,x))=\lambda\cdot x$

כשהתכונות הבאות מתקיימות:

(1) $u+v=v+u$ לכל $u,v\in V$ .

(2) $(u+v)+w=u+(v+w)$ לכל $v,u,w\in V$

(3) קיים איבר $\theta\in V$ שמקיים $v+\theta=v$ לכל $v\in V$ ($\theta$ נקרא איבר נטרלי)

(4) לכל $v\in V$ קיים $w\in V$ כך ש $v+w=\theta$ . (קיום של נגדי)

(5) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ לכל $u,v\in V$ , $\lambda\in\mathbb{R}$

(6) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$ לכל $u\in V$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ .

(7) $\lambda\cdot(\mu u)=(\lambda\mu)\cdot u$ לכל $u\in V$ , $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ .

(8) $1\cdot u=u$ לכל $u\in V$ .

<u>דוגמאות מרכזיות:</u>

(1) $\mathbb{R}^n$ עם פעולות של חיבור וכפל בסקלרים שהגדרנו בשיעור שעבר.
$\theta=\vec{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$

(2) $V=\{[a,b]\xrightarrow{\text{פונקציות}}\mathbb{R}\}$

$f,g\in V$ הן פונקציות. נגדיר את הפונקציות $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$

$(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\cdot f(x)$

$V$ עם הפעולות האלו זה מרחב וקטורי.

נבדוק את קיום תכונה (2)

$$(f+g)+h=f+(g+h)$$

<u>צ"ל</u> לכל $x\in[a,b]$

$$\underbrace{((f+g)+h)(x)}_{\parallel}=(f+(g+h))(x)$$

$$(f+g)(x)+h(x) \qquad f(x)+(g+h)(x)$$

$$f(x)+g(x)+h(x) \;\textcircled{=}\; f(x)+g(x)+h(x)$$

משל ☒

נבדוק את קיום תכונה (3)

האיבר הנטרלי שלנו הוא הפונקציה $\theta(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ ,

האיבר הנגדי שלנו הוא הפונקציה $(-f)(x)=-f(x)$ לכל $f\in V$

# אלגברה לינארית - שיעור 4

<u>טענה</u>: $V$ מ"ו אזי: <u>הערה</u>: איברים של מ"ו וקטורים.

(1) איבר ניטרלי הוא יחיד.

(2) לכל $v\in V$ איבר נגדי יחיד.

<u>הוכחה</u>:

(1) נניח שיש שני איברים ניטרליים $\theta_1$, $\theta_2$. מכאן ש-

אזי
$$\begin{cases} \underset{\text{נטרלי } \theta_2}{\theta_1+\theta_2 = \theta_1} \\ \quad\quad \| \\ \underset{\text{נטרלי } \theta_1}{\theta_2+\theta_1 = \theta_2} \end{cases}$$
קיבלנו $\theta_1=\theta_2$ מש"ל ☒

(2) יהי $v\in V$ נניח $w_1, w_2$ שני איברים נגדיים

אזי
$$\begin{cases} v+w_1=\theta \\ v+w_2=\theta \end{cases}$$

נחשב
$$\begin{cases} w_1+(v+w_2)=w_1+\theta=w_1 \\ (w_1+v)+w_2=(v+w_1)+w_2=\theta+w_2=w_2 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ קיבלנו $w_1=w_2$ <u>מש"ל</u> ☒

<u>הערה</u>: סימון של איבר נגדי: $-u$ לאיבר $u$. כמו כן, $u+(-v)=u-v$. $(u+v)+w=u+(v+w)=u+v+w$. $u_1+u_2+\dots+u_n$.

<u>טענה</u>: $V$ מ"ו. אזי מתקיים:

(1) $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ (חוק הצמצום).

(2) $\lambda\cdot\theta=\theta$ לכל $\lambda\in\mathbb{R}$.

(3) $0\cdot v=\theta$ לכל $v\in V$. $0\in\mathbb{R}$, $\theta$ הוא האיבר הנטרלי.

(4) $\lambda\cdot v=\theta \iff \lambda=0$ או $v=\theta$

(5) $(-1)\cdot v=-v$ לכל $v\in V$.

<u>הוכחה</u>:

(1) $a+c=b+c$, נוסיף $(-c)$ ונקבל $(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$
$\Leftarrow a+(c+(-c))=b+(c+(-c)) \Leftarrow a+\theta=b+\theta \Leftarrow a=b$.

(2) נסמן $v=\lambda\theta$. ידוע ש- $\theta+\theta=\theta$. נכפול ב- $\lambda$ ונקבל:
$\lambda(\theta+\theta)=\lambda\theta \Leftarrow \lambda\theta+\lambda\theta=\lambda\theta \Leftarrow v+v=v \Leftarrow v+v=v+\theta \underset{\text{חוק הצמצום}}{\Leftarrow} v=\theta$

(3) $0\cdot v\overset{?}{=}\theta \Leftarrow w=0\cdot v \Leftarrow 0\cdot v=(0+0)\cdot v \Leftarrow 0\cdot v=0\cdot v+0\cdot v \Leftarrow w=w+w \Leftarrow w=\theta$

(4) $\Leftarrow$ נובע מ- (2) ו- (3).

$\Rightarrow$ נניח $\theta=\lambda\cdot v$

אם $\lambda=0$ אין מה להוכיח

נניח $\lambda\neq 0$ נכפול את השוויון ב- $\frac{1}{\lambda}$ $\Leftarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda\cdot v)=\frac{1}{\lambda}\theta \Leftarrow (\lambda\cdot\frac{1}{\lambda})\cdot v=\theta \Leftarrow v=\theta$

מש"ל ☒

31.1.08 (4)

# אלגברה לינארית 1 - שיעור 4

המשך...

(5) צ"ל ש- $V+(-1)V \overset{?}{=} \theta$.

$$V+(-1)\cdot V = 1\cdot V+(-1)\cdot V = (1+(-1))V = \underset{\text{לפי (3)}}{0\cdot V =} \theta$$

מש"ל ☒

**תרגיל:**

(1) $u-(v+w)=(u-v)-w$

(2) $u-(v-w)=(u-v)+w$

(3) $u-v=\theta \Leftrightarrow u=v$

**הגדרה:** $V$ מ"ו. תת קבוצה $L\subset V$ נקראת תת מרחב וקטורי אם היא מקיימת:

(0) $L\neq\emptyset$

(1) אם $v\in L$ אז לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda\cdot v\in L$

(2) אם $v,w\in L$ אז $v+w\in L$.

**הערה:** אם $L<V$ תת מרחב ליניארי (אז) אז $\theta\in L$.

ניקח $x\in L$, $\theta=0\cdot x\in L$.

**הערה:** $L\subset V$ תת מרחב לינארי.
אנו יכולים להגדיר את פעולות החיבור (כפל בסקלרים) ב-$L$.
כלומר $\varphi: L\times L\to L$, $\psi:\mathbb{R}\times L\to L$. עם הפעולות האלה, $L$ הוא גם מ"ו,
כדי שהכלה שזה מתקיים, צריך לעבור על כל התנאים ולוודא שהם מתקיימים.
הבעייתי היחיד הוא (4) ואנחנו פותרים זאת כך $V\in L \Rightarrow \underbrace{(-1)V}_{-V}\in L$
פתרנו את הבעיה באמצעות כפל בסקלאר.

**הערה:** $G$ תת מרחב וקטורי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא מ"ו.

**הגדרה:** $V$ מ"ו. אומרים שהוקטורים $v_1,\dots,v_k\in V$ פורשים את $V$ אם לכל $x\in V$ קיימת הצגה $x=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k$ כאשר $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

**הערה:** הביטוי $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k$ נקרא צירוף לינארי של הוקטורים $v_1,\dots,v_k$ עם המקדמים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.

**דוגמא:** $V=\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} e_1=(1,0,0,\dots,0)\\ e_2=(0,1,0,\dots,0)\\ e_n=(0,0,\dots,1)\end{cases}$$

$e_1,e_2,\dots,e_n$ פורשים את $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n\ni \vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

**הגדרה:** $V$ מ"ו. סדרה $v_1,\dots,v_k\in V$ נקראת בלתי תלויה לינארית אם לא קיימים מספרים $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ שלא כולם 0 ו- $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k=\theta$
כלומר, כדי לאפס אותם, חייבים כל ה-$\lambda$ להיות 0.

31.1.08 (5)

אלגברה לינארית 1 - שיעור 4

המשך...

<u>דוגמה:</u> $V=\mathbb{R}^n$ $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ כמו קודם, $e_1,\dots,e_n$ בת"ל.

נניח $\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n=\vec{0}$ כלומר $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0$ , $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ מש"ל ☒.

<u>הגדרה:</u> סדרת וקטורים שהיא אינה בת"ל (כלומר היא כן תלויה) נקראת תלויה לינארית.

כלומר, $v_1,\dots,v_k\in V$ תלויה לינארית $\Leftrightarrow$ קיימים (לפחות אחד) $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ כך שלא כולם 0 ומתקיים $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k=\theta$.

<u>הגדרה:</u> סדרת וקטורים $v_1,\dots,v_k$ שהיא גם פורשת את $V$ וגם בת"ל נקראת בסיס של $V$.

<u>דוגמה:</u> $e_1,\dots,e_n\in\mathbb{R}^n$ כמו קודם זה בסיס של $\mathbb{R}^n$, שנקרא בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}^n$.