29.1.08 ①

אלגברה לינארית - שיעור

מרחב $\mathbb{R}^n$ ומרחבים וקטורים מעל $\mathbb{R}$

הגדרה יהי $n\in\mathbb{N}$

מרחב R^n זה אוסף של כל ה n-יות של מספרים ממשיים.

דוגמא:

① $n=1$ $R^1=\mathbb{R}$

איברים של $\mathbb{R}^n$ נקראים גם וקטורים. סימון: $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$\vec{0}=(0,0,0,\dots,0)\in R$

$n>1$ $\vec{0}\neq 0$

פעולות אלגבריות עם וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$

הגדרה $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$ **הסכום**: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$

הגדרה יהיו $\mathbb{R}^n\ni\vec{a}=\{a_1,\dots,a_n\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

נגדיר **כפל של $\vec{a}$ ב- λ**: $\lambda\cdot\vec{a}=\{\lambda\cdot a_1,\dots,\lambda\cdot a_n\}$

משפט:

(א) חוק החילוף בחיבור: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ לכל $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

(ב) חוק הקיבוץ בחיבור: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}$

(ג) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ לכל $\vec{a}\in\mathbb{R}$

(ד) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ (כאשר אם $\vec{a}=\{a_1,\dots,a_n\}$ אז $-\vec{a}=\{-a_1,\dots,-a_n\}$)

(ה) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ לכל $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(ו) $(\lambda+k)\vec{a}=\lambda\vec{a}+k\vec{a}$ $\lambda,k\in\mathbb{R}$ $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$

(ז) $\lambda(k\vec{a})=(\lambda\cdot k)\vec{a}$ לכל $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ $\lambda,k\in\mathbb{R}$

(ח) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ לכל $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ $1\in\mathbb{R}$

הוכחה:

(א) $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)\\ \vec{b}+\vec{a}=(b_1+a_1,\dots,b_n+a_n)\end{cases}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

עפ"י חוק החילוף למספרים ממשיים.

(ז) $\lambda(M\vec{a})=(\lambda M)\vec{a}$ נסמן $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$

$$\begin{cases}\lambda\cdot(M\vec{a})=(\lambda\cdot(Ma_1),\dots,\lambda(Ma_n))\\ \lambda M\cdot\vec{a}=((\lambda\cdot M)a_1,\dots,(\lambda M)a_n)\end{cases}\Rightarrow \lambda(M\vec{a})=(\lambda\cdot M)\vec{a}$$

עפ"י חוק הקיבוץ למספרים ממשיים.

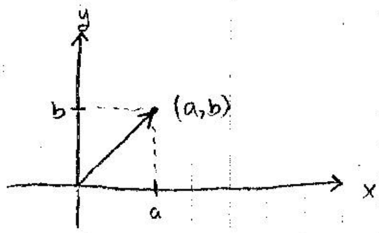
שאר המשפטים להוכיח כתרגיל.

29.1.08 ②

אלגברה לינארית - שיעור

נסמן $\vec a + (-\vec b) = \vec a - \vec b$

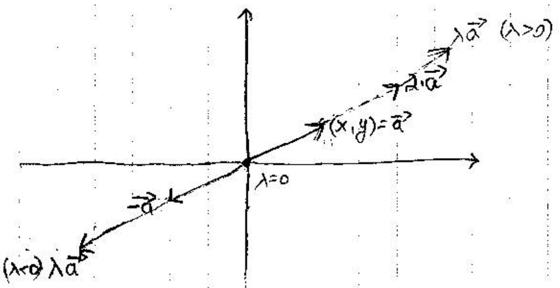
משמעות גאומטרית של חיבור וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^3$



עבור $\mathbb{R}^2$: נקבע מערכת קואורדינטות במישור
שני צירים לזהות נקודה במישור עם $\mathbb{R}^2$.

נשים לב שלוקטור $(0,0)$ אין כיוון.

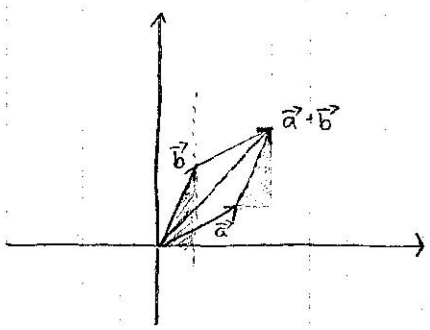
כפל בסקלר



נניח שקיים לנו הוקטור $\vec a=(x,y)$
וננסה לצייר את הוקטורים $2\vec a=(2x,2y)$, $-\vec a$, $\lambda\vec a$

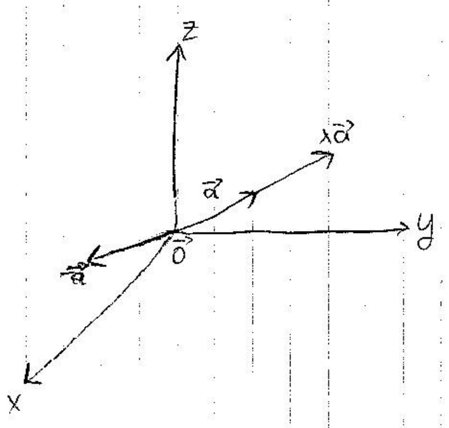
אם ניקח וקטור כלשהו על הישר $\vec a$, נקבל $\lambda\vec a$
עם גודל כלשהו של λ. כלומר, הכפלה של וקטור
ב-λ משאיר את הוקטור החדש על אותו ישר.

חיבור של וקטורים - כלל המקבילית.



כדי לבצע את החיבור נשלים את הוקטורים
המקבילים כדי ליצור מקבילית. אלכסון המקבילית
הוא תוצאת החיבור.

ניתן להוכיח זאת בגאומטריה בעזרת משולשים.
אם הוקטורים הם תלויים (על אותו ישר), יש פשוט
לקחת את אחד הוקטורים ולהזיז אותו בסוף השני.



עבור $\mathbb{R}^3$: נקבע מערכת קואורדינטות במרחב
שאפשר לזהות וקטורים מ-$\mathbb{R}^3$ עם מגמות
מכוונים שמתחילים בראשית.

וקטורים מהצורה $\lambda\vec a$ הם בדיוק הוקטורים
שמקבילים לישר שנפרס ע"י $\vec a$, ולהפך.

במידה וקיימים 2 וקטורים במרחב ניתן בפשטות למצוא מישור
המשותף להם ועליו לבצע את כלל המקבילית.

הגדרה: תת קבוצה $L\subset\mathbb{R}^n$ נקראת תת מרחב לינארי אם

(0) $L\neq\emptyset$

(1) לכל $\vec x\in L$, לכל $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\vec x\in L$

(2) לכל $\vec x,\vec y\in L$, $\vec x+\vec y\in L$!

הערה: אם $L\subset\mathbb{R}^n$ תת מרחב לינארי אז $\vec 0\in L$ $(\vec 0=0\cdot\vec x\in L \Leftarrow x\in L)$

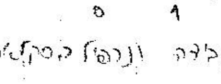
דוגמאות

(1) $\mathbb{R}^n$, $L=\mathbb{R}^n$ - תת מרחב לינארי.

(2) $\mathbb{R}^n$, $L=\{\vec 0\}$ תת מרחב לינארי.

(3) $\mathbb{R}^1$ $L=\{0,1\}$ - לא תת מרחב לינארי

(4) $\mathbb{R}^1$ $L=\mathbb{Z}$ - לא תת מרחב לינארי



כי אם ניקח לדוגמא 1 ששייך לקבוצה ונכפיל בסקלר $\frac{1}{2}$ - תוצאה לא ב-L.

29.1.08 (3)

אלגברה לינארית - שיעור

המשך...

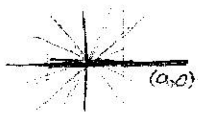
(5) $\mathbb{R}^1$ נתאר את כל תת המרחבים הלינאריים ב-$\mathbb{R}^1$

$\mathbb{R}^1$, $\{\vec{0}\}$,

נניח שקיים עוד תת מרחב (נסמן) $\{0\} \neq L \subset \mathbb{R}^1$ (שונה מתת המרחב הטריוויאלי),

$0 \neq x \in L$ $\quad \underset{\in\mathbb{R}}{\lambda} \underset{\in\mathbb{R}}{x} \in L$ לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ אזי $L = \mathbb{R}^1$.

(6) נתאר את כל תתי המרחבים הלינאריים ב-$\mathbb{R}^2$.



$\mathbb{R}^2$, $\{\vec{0}\}$, כל ישר העובר דרך הראשית הוא תת מרחב לינארי ב-$\mathbb{R}^2$.

נראה שאין תתי מרחב לינאריים נוספים ב-$\mathbb{R}^2$

נניח שקיים תמ"ל שונה מ-0 ושונה מישר $\quad L = \mathbb{R}^2 \overset{?}{\Leftarrow} \begin{cases} 0 \neq L \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{ישר } * \end{cases}$

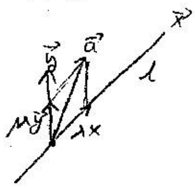
$\vec{0} \neq \vec{x} \in L$

$l \subset L$

$\neq$

$\vec{y} \in L$

$\vec{y} \notin l$

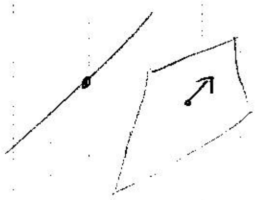


$\Leftarrow a = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \Leftarrow$

$$\frac{\begin{matrix}\lambda\vec{x} \in L \\ \mu\vec{y} \in L\end{matrix}}{\vec{a} \in L}$$

מש"ל

(7) נתאר את כל התמ"לים ב-$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3$, $\{\vec{0}\}$, כל ישר שעובר דרך הראשית, כל מישור שעובר דרך הראשית.

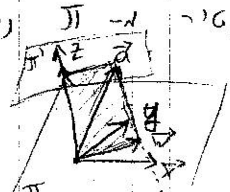
$$L = \mathbb{R}^3 \overset{?}{\Leftarrow} \begin{cases} \{0\} \neq L \subset \mathbb{R}^3 \\ \text{ישר דרך הראשית} \\ \text{מישור דרך הראשית} \end{cases}$$

$\{\vec{0}\} \neq L$ ניקח $\vec{0} \neq x \in L$ נתבונן בישר שנפרש ע"י x $\quad l \subset L$, $l \neq L$

ניקח $y \in L/l$, נתבונן במישור π שנפרש ע"י $\vec{x}$ ו-$\vec{y}$.

$\pi \subset L$ כי כל וקטור ב-π ניתן להצגה $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$. לפי ההנחה $\pi \neq L$

ניקח $\vec{z} \in L/\pi$



לכל $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ קיימת הצגה

$$\boxed{\vec{a} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} + \nu\cdot\vec{z} \in L}$$

מש"ל

$\Downarrow$

$L = \mathbb{R}^3$

$\vec{a} = \vec{w} + \nu\vec{z}$

$\vec{w} \in \pi$

$\Downarrow$

$\vec{w} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$

$$\boxed{\vec{a} = \lambda\cdot\vec{x} + \mu\vec{y} + \nu\vec{z}}$$

מש"ל