אלגברה לינארית
שיעור 27.03.08 (1)

27.3.2008

מחר 12-14
אורנשט"ין 111

$S \subset V$ $\qquad$ $S^{\circ} \subset V^*$

$T \subset V^*$ $\qquad$ $T_0 \subset V$

טענה:

1) אם $T_1 \subset T_2$ $\Leftarrow$ $T_{1_0} \supset T_{2_0}$

2) $\left(\bigcup_\alpha T_\alpha\right)_0 = \bigcap_\alpha T_{\alpha_0}$

3) $T_0 = (\operatorname{span} T)_0$

4) אם $N \subset V^*$ תת-מרחב לינארי, $\dim V < \infty$, אזי $\dim N + \dim N_0 = \dim V$

הוכחה:

① $(T_1)_0 = \bigcap_{t \in T_1} \ker t$ $\qquad$ $(T_2)_0 = \bigcap_{t \in T_2} \ker t$

② "$\subset$" יהי $x \in \left(\bigcup_\alpha T_\alpha\right)_0$ $\Leftrightarrow$ לכל $t \in \bigcup_\alpha T_\alpha$ $\quad t(x)=0$

בפרט לכל α, לכל $t \in T_\alpha$ $\quad t(x)=0$ $\Leftarrow$ לכל α $\quad x \in (T_\alpha)_0$

$\Leftarrow$ $x \in \bigcap_\alpha (T_\alpha)_0$

"$\supset$" יהי $y \in \bigcap_\alpha (T_\alpha)_0$. לכל α $\quad y \in (T_\alpha)_0$. לכן לכל α ולכל $t \in T_\alpha$, $t(y)=0$,

לכן לכל $t \in \bigcup_\alpha T_\alpha$, $t(y)=0$. כלומר, $y \in \left(\bigcup_\alpha T_\alpha\right)_0$

③ $T \subset \operatorname{span} T$. לכן לפי (1) $T_0 \supset (\operatorname{span} T)_0$.

נוכיח "$\subset$". יהי $x \in T_0$, ויהי $\xi \in \operatorname{span} T$ צ"ל $\xi(x)=0$. אזי $\xi = \sum \lambda_i \xi_i$

$\xi_i \in T$ $\qquad$ $\xi(x) = \sum \lambda_i \underbrace{\xi_i(x)}_{0} = 0$

④ שלב I: נבחר בסיס $\delta^1, \dots, \delta^k$ ל-N. $k = \dim N$ נשלים אותו עד לבסיס של

V^* ע"י $\delta^{k+1}, \dots, \delta^n$ כאשר $n = \dim V^* = \dim V$

שלב II: נבנה בסיס $e_1, \dots, e_n$ ב-V כך שהבסיס הדואלי שלו זה $\delta^1, \dots, \delta^n$

נתבונן בהעתקה: $T: V \to F^n$ שמוגדרת $T(x) = (\delta^1(x), \dots, \delta^n(x))$.

קל לראות ש- T ט"ל (משום ש- δ ט"ל).

נוכיח ש- T היא איזומורפיזם

משום ש- $\dim V = \dim F^n = n$, מספיק להוכיח כי T חח"ע.

מספיק להוכיח כי $\ker T = \{\theta\}$

נניח $x \in \ker T$. $T(x) = (0, \dots, 0)$

$$\begin{cases} \delta^1(x) = 0 \\ \vdots \\ \delta^n(x) = 0 \end{cases}$$

אבל $\delta^1, \dots, \delta^n$ בסיס של V^* לכן, לכל $\xi \in V^*$ $\xi(x) = 0$!

<u>למה:</u> $\theta \neq x \in V$, $\dim V < \infty$, אזי קיים $\xi \in V^*$ כך ש- $\xi(x) \neq 0$. (הוכחה בהמשך)

למה $\Leftarrow$ $x = \theta$, לכן T חח"ע, ולכן T איזומורפיזם.

יהיו $e_1, \dots, e_n \in V$ התמונות ההפוכות (מקור) של הבסיס הסטנדרטי של F^n ע"י T (מקור של הבסיס הסטנדרטי).

הסדרה הנ"ל היא בסיס של V (כי T^{-1} איזומורפיזם).

נבדוק שהבסיס הדואלי של $e_1, \dots, e_n$ זה בדיוק $\delta^1, \dots, \delta^n$ $\quad \delta^i(e_j) \overset{?}{=} \delta_{ij}$

$$\underline{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)} = T(e_i) = \underline{(\delta^1(e_i), \dots, \delta^n(e_i))}$$

<u>צעד III</u>: נוכיח כי $N_0 = \operatorname{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$

אם הוכחנו את זה, אזי $\dim N_0 = n-k$ $\Leftarrow$ הוכחה הטענה.

$\delta^1, \dots, \delta^k$ בסיס של N. יהי $x \in V$ $\quad x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$

$x \in N_0 \Leftrightarrow$ לכל $1 \le j \le k$ $\delta^j(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ לכל $1 \le j \le k$ $x_j = 0$

$\Leftrightarrow x \in \operatorname{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$, לכן $N_0 = \operatorname{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$

<u>מש"ל</u>

<u>הוכחת הלמה</u>

$\theta \neq x \in V$.

$v_1, \dots, v_n$ בסיס כלשהו של V $\quad \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ בסיס דואלי.

נראה כי קיים i כך ש- $\varepsilon^i(x) \neq 0$. $\quad x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \varepsilon^i(x) = x_i$

אבל קיים i כך ש- $x_i \neq 0$ (אחרת $x = \theta$).

<u>מש"ל</u>

טענה: נניח $\dim V<\infty$

א) יהי $M\subset V$ תת מרחב לינארי אזי $(M^{\circ})_{\circ}=M$

ב) יהי $N\subset V^{*}$ תת מרחב לינארי אז $(N_{\circ})^{\circ}=N$

הוכחה:

ב) נבדוק $N\subset (N_{\circ})^{\circ}$. יהי $\xi\in N$. יהי $x\in N_{\circ}$ צ"ל: $\xi(x)=0$ וזאת

בגלל הגדרה של $N_{\circ}$ (תת מרחב אפסי).

כדי להוכיח את השוויון מספיק לבדוק כי $\dim N=\dim(N_{\circ})^{\circ}$. אבל

$$\dim(N_{\circ})^{\circ}=\dim V-\dim N_{\circ}$$
$$\dim V-(\dim V-\dim N)=\boxed{\dim N}$$

מש"ל

מרחב דואלי שני

הגדרה: יהי V מ"ו. מרחב דואלי שני $(V^{*})^{*}=V^{**}$ $\qquad \dim V^{*}=\dim V$

נבנה ט"ל "טבעית" (קנונית) $c: V\to V^{**}$ $\qquad \dim V^{**}=\dim V$

יהי $x\in V$ $\boxed{(c(x))(\xi):=\xi(x) \quad \text{לכל } \xi\in V^{*}}$

טענה: c ט"ל

הוכחה: צ"ל: א) $c(x_1+x_2)=c(x_1)+c(x_2)$

ב) $c(\lambda x)=\lambda c(x)$

א) לכל $\xi\in V^{*}$ צ"ל: $(c(x_1+x_2))(\xi)=(c(x_1)+c(x_2))(\xi)$

$$\xi(x_1+x_2)\;\;\;\; = (c(x_1))(\xi)+(c(x_2))(\xi)=\xi(x_1)+\xi(x_2)$$

ב) תרגיל.

טענה: אם $\dim V<\infty$ אזי C איזומורפיזם.

הוכחה: $\dim V^{**}=\dim V$, לכן מספיק להוכיח $\ker C=\{\theta\}$.

נניח $x\in\ker C$, $C(x)=\theta_{V^{**}}$. זה אומר לכל $\xi\in V^*$.

$$\xi(x) = (C(x))(\xi)=0$$

$x\in V$, $\xi(x)=0$ לכל $\xi\in V^*$.

לכן $x=\theta_V$ (לפי הלמה שהוכחנו היום). מש"ל

טענה: יהי V מ"ו ממימד סופי. $N\subset V^*$ תת מרחב לינארי, אזי $C(N_0)=N^0$.

הוכחה: נבדוק קודם כל $C(N_0)\subset N^0$. יהי $x\in N_0$. צ"ל $C(x)\in N^0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ לכל $\xi\in N$ מתקיים $(C(x))(\xi)\overset{?}{=}0$

$\Leftrightarrow$ לכל $\xi\in N$, $\xi(x)=0$ (מתקיים כי $x\in N_0$)

לכן $C(N_0)\subset N^0$. נשאר להוכיח ש- $\dim C(N_0)=\dim N^0$

$$\dim C(N_0) \overset{C\text{ איזו}}{=} \dim N_0 = \dim V - \dim N$$

$$\dim N^0 = \dim V - \dim N$$

מש"ל

מבחן שונה לשתי הקבוצות:

מבנה המבחן: 4 שאלות, כל שאלה עם שני סעיפים, אין בחירה

לכל שאלה 26 נקודות (104 בסה"כ)

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר פרט למחשבונים

לא יהיו הוכחות מהקורס - יכול להיות שתהיה טענה דומה להוכחות בקורס.

אין שאלות אמריקאיות

תרגיל 1

$f\in V^*$, $\dim V = n$, $\dim\ker f = ?$ $\qquad f: V\to F$

$\{0\}\neq \operatorname{Im} f \subseteq F$

$\dim F = 1$

א) אם $f=\theta_{V^*}$ $\qquad \dim\ker f = n$

ב) אם $f\neq\theta$ $\qquad \dim\ker f = n-\dim\operatorname{Im} f = \boxed{n-1}$

תרגיל 2

$0\neq f\in V^*$, $a\in V\setminus\ker f$ אזי צ"ל $V=\ker f\oplus\operatorname{span}\{a\}$

מהנתון כי a לא שייך לגרעין $\qquad \ker f\cap\operatorname{span}\{a\}=\{\theta\}$

$\Downarrow$

$\ker f\oplus\operatorname{span}\{a\}\subset V$

יהי $x\in V$ . . $\qquad x\overset{?}{=}z+\lambda a$

$z\in\ker f$

$\lambda\in F$

נפעיל f על השוויון ונקבל $\qquad f(x)=\underbrace{f(z)}_{0}+\lambda f(a)$

$$\lambda=\frac{f(x)}{f(a)_{\neq 0}} \xrightarrow{\text{הצבה}} z:=x-\frac{f(x)}{f(a)}a$$

נבדוק כי $f(z)=0$ (שייך לגרעין)

$$f(z)=f(x)-\frac{f(x)}{f(a)}\cdot f(a)=0 \Rightarrow z\in\ker f$$

$$\boxed{x=\left(x-\frac{f(x)}{f(a)}a\right)+\frac{f(x)}{f(a)}\cdot a}$$

תרגיל 3: יהיו $f_1,\dots,f_n\in V^*$. $n=\dim V$. להוכיח שהם בסיס של V^* $\iff$ $\bigcap_{i=1}^{n}\ker f_i=\{\theta_{V^*}\}$

4 א) יהיו $M_1,M_2\subset V$ תתי מרחבים לינאריים. להוכיח $(M_1+M_2)^0=M_1^0\cap M_2^0$

ב) $N_1,N_2\in V^*$ תתי מרחבים לינאריים. להוכיח $(N_1+N_2)_0=(N_1)_0\cap(N_2)_0$

5 יהיו $v_1,\dots,v_k\in V$. להוכיח כי הם בת"ל $\iff$ קיימים $f_1,\dots,f_k\in V^*$ כך ש

$$\det\left(f_i(v_j)\right)_{i,j=1}^{k}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & \dots & f_1(v_k)\\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & \dots & f_2(v_k)\\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---}\\ f_k(v_1) & f_k(v_2) & \dots & f_k(v_k)\end{bmatrix}$$