20/3/08

הרצאה 19

בשיעור שעבר הראינו:

$\varphi : V \to W$

$A_\varphi \quad (e) \quad (\xi)$

$\dim \operatorname{Im}\varphi = rk A_\varphi$

סימון: $L(V,W)$ - קבוצה של העתקות ה"ל מ-V ל-W.

$n = \dim V$

$m = \dim W$

נקבע: (e) בסיס של V, (ξ) בסיס של W

בנינו העתקה $L(V,W) \to M_{m\times n}(F)$

$\varphi \longmapsto A_\varphi$

<u>משפט</u>: ההעתקה הזאת היא חח"ע ועל

<u>הוכחה</u>: <u>חח"ע</u>: נניח $\varphi, \psi \in L(V,W)$ כך ש- $A_\varphi = A_\psi$

זה אומר שלכל e_i מהבסיס של V $\varphi(e_i) = \psi(e_i)$ לכן $\varphi = \psi$.

($x = \sum \lambda_i e_i \ni V$, $\varphi(x) = \sum \lambda_i \varphi(e_i)$

$\psi(x) = \sum \lambda_i \psi(e_i)$)

<u>על</u>: תהי $M_{m\times n}(F) \ni A = (a_{ij})$

צ"ל <u>ש</u>קיימת $\varphi \in L(V,W)$ כך ש- $A_\varphi = A$

חייב להתקיים $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i = w_j \in W$

נגדיר $\varphi : V \to W$ בצורה הבאה $\varphi(x) = \sum_j x_j w_j$ $\quad x = \sum_j x_j e_j$

קל לראות שה- φ הזה הוא ה"ל, והמטריצה של φ ביחס לבסיסים (e), (ξ) שווה ל- A. <u>מש"ל</u>

$\varphi : F^n \to F^m$ קיימת מטריצה $A \in M_{m\times n}(F)$ כך ש- $\varphi(x) = Ax$
$[x \longmapsto Ax]$

הוכחנו שהמטריצה של φ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים ב- F^n, F^m שווה ל- A.

נתבונן במטריצה של φ, A_φ. ביחס לבסיסים הסטנדרטיים.

אז $\underline{\varphi(x) = A_\varphi \cdot x}$. <u>מש"ל</u>

$V \to W$, $L(V,W)$

<u>הגדרה</u>: (א) עבור $\varphi \in L(V,W)$, $\lambda \in F$ נגדיר $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ לכל V

(ב) עבור $\varphi, \psi \in L(V,W)$ נגדיר $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

<u>טענה</u>: $\lambda\varphi,\ \varphi+\psi\in L(V,W)$ כאשר $\varphi,\psi\in L(V,W)$, $\lambda\in F$

<u>הוכחה</u>: (א) $(\lambda\varphi)(x+y)=\lambda\varphi(x+y)=\lambda(\varphi(x)+\varphi(y))=$

$=\lambda\varphi(x)+\lambda\varphi(y)=(\lambda\varphi)(x)+(\lambda\varphi)(y)$

כלומר $\lambda\varphi$ שומרת על חיבור

$(\lambda\varphi)(\mu x)=\lambda\varphi(\mu x)=\lambda\mu\varphi(x)=\mu\lambda\varphi(x)=\mu\cdot(\lambda\varphi)(x)$

כלומר $\lambda\varphi$ שומרת על כפל בסקלר. לכן $\lambda\varphi$ ט"ל.

(ב) נוכיח ש $\varphi+\psi$ ט"ל

$(\varphi+\psi)(\mu x)=\varphi(\mu x)+\psi(\mu x)=\mu\varphi(x)+\mu\psi(x)=\mu(\varphi(x)+\psi(x))=\mu(\varphi+\psi)(x)$

$(\varphi+\psi)(x+y)=\varphi(x+y)+\psi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)+\psi(x)+\psi(y)=(\varphi+\psi)(x)+(\varphi+\psi)(y)$

מש"ל

<u>טענה</u>: עם הפעולות של חיבור וכפל בסקלרים שהגדרנו $L(V,W)$ הוא מ"ו מעל F.

<u>הוכחה</u>: האיבר הניטרלי ביחס לחיבור הוא ט"ל ששולחת כל וקטור ל- θ_W : $[x\longmapsto\theta_W]$.

האיבר הנגדי: $(-\varphi)(x)=-\varphi(x)$

נבדוק למשל דיסטריבוטיביות, כלומר $\lambda(\varphi+\psi)=\lambda\varphi+\lambda\psi$.

צריך להוכיח שלכל $x\in V$ $(\lambda(\varphi+\psi))(x)=\underline{(\lambda\varphi+\lambda\psi)(x)}$ לפי הגדרת

$=\lambda(\varphi+\psi)(x)$ <- כפל של ערך בסקלר

$=\lambda(\varphi(x)+\psi(x))=\lambda\cdot\varphi(x)+\lambda\cdot\psi(x)=(\lambda\cdot\varphi)(x)+(\lambda\psi)(x)=(\lambda\varphi+\lambda\psi)(x)$

שאר התכונות - תרגיל. <u>מש"ל</u>

<u>משפט</u>: נקבע בסיסים (e) ב- V ו- (ξ) ב- W.

אזי ההעתקה $L(V,W)\longrightarrow M_{m\times n}(F)$ זה איזו' של מרחבים וקטוריים.

$\varphi\longmapsto A_\varphi$

<u>הוכחה</u>: נשאר להוכיח $A_{\lambda\varphi}=\lambda\cdot A_\varphi$, $A_{\varphi+\psi}=A_\varphi+A_\psi$

(כלומר שההעתקה היא לינארית)

א. העמודה ה-j-ית של $A_{\lambda\varphi}$ היא עמודת הקואורד' של $(\lambda\varphi)(e_j)=\underbrace{\lambda\cdot\varphi(e_j)}$

מכפילים העמודה ה-j-ית של A_φ

לכן $A_{\lambda\varphi}=\lambda A_\varphi$

ב. $A_{\varphi+\psi}=A_\varphi+A_\psi$. העמודה ה-j-ית של $A_{\varphi+\psi}$ הוא העמודה של

קואורד' של $(\varphi+\psi)(e_j)=\varphi(e_j)+\psi(e_j)$. אבל קואורד' של סכום של שני

וקטורים זה סכום של קואורד' של הוקטורים האלה. לכן מקבלים סכום

<u>מסקנה</u>: $L(V,W) \cong M_{m\times n}(F)$

לכן $\dim L(V,W) = m\cdot n$ (ראינו בתרגול)

<u>משפט</u>: יהיו $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} Z$ (φ, ψ - העת' ל"ל)

$(e)\quad(\xi)\quad(\eta)$

נסמן A_φ את המטריצה של φ ביחס ל-(e), (ξ)

A_ψ את המטריצה של ψ ביחס ל-(ξ), (η)

אזי המטריצה של $\psi\circ\varphi$ ביחס ל-(e), (η) שווה $A_\psi\cdot A_\varphi$

<u>הוכחה</u>: $(\psi\circ\varphi)(e_j) = \sum_i (A_{\psi\circ\varphi})_{ij}\,\eta_i$

$$\psi(\varphi(e_j)) = \psi\Big(\sum_k (A_\varphi)_{kj}\,\xi_j\Big) = \sum_k (A_\varphi)_{kj}\,\psi(\xi_j) = \sum_k (A_\varphi)_{kj}\Big(\sum_l (A_\psi)_{lk}\,\eta_l\Big)$$

$$= \sum_k\sum_l (A_\psi)_{lk}(A_\varphi)_{kj}\,\eta_l = \sum_l\Big(\sum_k (A_\psi)_{lk}(A_\varphi)_{kj}\Big)\eta_l$$

קיבלנו: $\sum_l (A_{\psi\circ\varphi})_{lj}\,\eta_l = \sum_l\Big(\sum_k (A_\psi)_{lk}\,(A_\varphi)_{kj}\Big)\eta_l$

(שינינו בצד שמאל את האינדקס i ל-l שכן זה לא משנה)

משום ש-(η) בסיס: $(A_{\psi\varphi})_{lj} = \sum_k (A_\psi)_{lk}(A_\varphi)_{kj}$

<u>מש"ל</u> $\boxed{A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi\cdot A_\varphi}$ $\forall\, l,j$

<u>הוכחה חדשה</u> לכך ש- $AB=I \Leftarrow BA=I$ עבור $\underset{n\times n}{A}$, $\underset{n\times n}{B}$

יהי $\varphi: F^n\to F^n$ כך שהמטריצה של φ בבסיסים הסטנד' שווה A.

$\psi: F^n\to F^n$ עם המטריצה B בבסיסים הסטנד':

המטריצה של $\varphi\circ\psi: F^n\to F^n$ בבסיסים הסטנד' שווה $A\cdot B$

המטריצה של $\psi\circ\varphi: F^n\to F^n$ בבסיסים הסטנד' שווה $B\cdot A$

נתון: $A\cdot B=I_n \Leftarrow \varphi\circ\psi=Id$. צ"ל: $\psi\circ\varphi=Id$

נניח $\psi(x)=\theta$ נפעיל φ ונקבל $\varphi(\psi(x))=\varphi(\theta)=\theta$

$\qquad\quad\parallel$

$(\varphi\circ\psi)(x)=x$

לכן ψ חח"ע (כי הגרעין הוא θ - לפי המשפט)

וגם φ - על ($\varphi(\psi(y))=y$)

לכן φ,ψ איזו' $F^n \xrightarrow{\cong} F^n \xrightarrow{\overset{\psi}{\cong}} F^n$

צ"ל שלכל $y\in F^n$ $(\psi\circ\varphi)(y)=y$.

משום ש-ψ היא על קיים $x\in F^n$ כך ש- $y=\psi(x)$

$$(\psi\circ\varphi)(y) = (\psi\circ\varphi)(\psi(x)) = \psi(\underbrace{\varphi(\psi(x))}_{=x \text{ לפי הנתון}}) = \psi(x) = y$$

$\psi\circ\varphi = Id$, לכן $B\cdot A = I_n$ מש"ל

<u>טענה</u>: יהי $\varphi: V\to W$ ה"ל

$n=\dim V=\dim W$

(ב) בסיס ב-V , (ג) בסיס ב-W

A_φ - מטריצה של φ ביחס לבסיסים האלה.

אזי A_φ הפיכה $\iff$ φ איזו'

<u>הוכחה</u>: $\boxed{\Leftarrow}$: נניח A_φ הפיכה. כלומר קיימת B כך ש $A_\varphi\cdot B=I_n$, $B\cdot A_\varphi=I_n$. יהי $\psi: W\to V$ ה"ל שהמטריצה שלה ביחס ל-(ג) ו-(ב) שווה ל-B אזי המטריצה של $\varphi\circ\psi$ שווה $A_\varphi B=I_n$, אזי המטריצה של $\psi\circ\varphi$ שווה $I_n=BA_\varphi$. לכן $\varphi\circ\psi=Id$, $\psi\circ\varphi=Id$

$\boxed{\Rightarrow}$: נניח φ איזו'. יהי B המטריצה של φ^{-1} ביחס ל-(ג), (ב).
אזי המטריצה של $\varphi\circ\varphi^{-1}=Id$ שווה $A_\varphi\cdot B=I_n$
המטריצה של $\varphi^{-1}\circ\varphi=Id$ שווה $B\cdot A_\varphi=I_n$. מש"ל

מרחב דואלי (צמוד)

יהי V מרחב וקטורי מעל F.

<u>הגדרה</u>: $L(V,F)$ נקרא מרחב דואלי (צמוד)
האיברים בו נקראים פונקציונלים לינאריים על V. $L(V,F)=V^*$

<u>הערה</u>: אם $\dim V<\infty$ (המימד סופי) אזי $\dim V^*=\dim V$

<u>דוגמה</u>: $V=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$

$V^*=\mathbb{R}^*$ כל פונק' לינארי על $\mathbb{R}$ מוגדר באופן יחיד ע"י
הערך שלו ב-$1\in\mathbb{R}$

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^*\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}$ $\qquad$ כלומר ה"ל איזו'

$\varphi\longmapsto\varphi(1)$