18/3/08

הרצאה 18

<u>משפט</u>: יהיו V,W שני מרחבים ממימד סופי מעל F.

אזי $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

<u>למה</u>: (א) יהי $\varphi: V \to W$ מונומורפיזם אזי תמונה של כל סדרה בת"ל היא בת"ל.

(ב) יהי $\psi: V \to W$ אפימורפיזם אזי תמונה של כל סדרה פורשת היא סדרה פורשת. (כל סדרה פורשת של V התמונה שלה היא סדרה פורשת של W)

<u>הוכחה</u>: (א) הוכחנו שיעור שעבר.

(ב) יהיו $v_1,\dots,v_k \in V$ סדרה פורשת. צ"ל: $\psi(v_1),\dots,\psi(v_k)$ פורשת ב-W

יהי $y \in W$. קיים $x \in V$ כך ש $\psi(x) = y$ (כי ψ על)

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

$$y = \psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi(v_i)$$ מש"ל

<u>מסקנה</u>: יהי $\varphi: V \to W$ איזומורפיזם. אזי תמונה של כל בסיס של V הוא בסיס של W.

לכן, אם $V \cong W$ אזי $\dim V = \dim W$

$V \cong W$ זה אומר שקיים $\varphi: V \xrightarrow{\cong} W$

$$\underbrace{e_1,\dots,e_n}_{\text{בסיס ב-}V} \to \underbrace{\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)}_{\text{בסיס ב-}W}$$

לכן הוכחנו את הכיוון $\boxed{\Leftarrow}$ במשפט.

נוכיח את הכיוון ההפוך $\boxed{\Rightarrow}$: $n = \dim V = \dim W < \infty$

נקבע בסיס $e_1,\dots,e_n$ ב-V ובסיס $\xi_1,\dots,\xi_n$ ב-W.

לכל וקטור $x \in V$ קיימת ויחידה הצגה $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

לכל $y \in W$ קיימת ויחידה הצגה $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \xi_i$

נבנה העתקה $\varphi: V \to W$ שמוגדרת: $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$

נוכיח ש-φ איזומורפיזם. תחילה, נבדוק ש-φ ה"ל (שומרת על כפל בסקלר וחיבור); יהי $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x \in V$. לפי הגדרת φ

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$$

$$\varphi(\lambda x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \xi_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = \lambda \varphi(x)$$

לכן φ שומרת על כפל בסקלר.

נוכיח ש-φ שומרת על חיבור, כלומר נוכיח $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ לכל $x,y\in V$

$$x=\sum x_i e_i \qquad \varphi(x)=\sum x_i\xi_i$$
$$y=\sum y_i e_i \qquad \varphi(y)=\sum y_i\xi_i$$
$$x+y=\sum (x_i+y_i)e_i \qquad \varphi(x+y)=\sum (x_i+y_i)\xi_i$$
$$=\sum x_i\xi_i+\sum y_i\xi_i=\varphi(x)+\varphi(y)$$

לכן φ ה"ל.

כעת נוכיח ש-φ על: יהי $w\in W$. $w=\sum w_i\xi_i$

לפי ההגדרה של φ $w=\varphi(\sum w_i e_i)$ לכן φ על.

מזה נובע ש-φ חח"ע משום ש $\dim V=\dim W$. <u>מש"ל</u>

<u>מסקנה</u>: יהי V מ"ו מעל F ממימד n, אזי $V\cong F^n$

(מספיק לבדוק שיש להם אותו מימד) $\dim V=n$

$\dim F^n=n$

(הוכחנו עבור R^n ואותה הוכחה עבור F^n. הבסיס הסטנדרטי ב-F^n:

$e_1=(1,0,0,\dots,0)$

$e_2=(0,1,0,\dots,0)$

$\dots$

$e_n=(0,0,0,\dots,1)$

(כמו ב-R^n מבדיקים שזה בסיס ל-F^n)

<u>מטריצה של ה"ל</u>

$\varphi:V\to W$ ה"ל. יהי $e_1,\dots,e_n$ בסיס ב-V, $\xi_1,\dots,\xi_m$ בסיס ב-W

נבנה מטריצה A_φ $m\times n$ כך שהעמודה ה-i-ית של A מורכבת מ-m-ה קואורדינטות של $\varphi(e_i)$ ביחס לבסיס $[\xi]$.

A נקראת מטריצה של φ ביחס לבסיסים $[e],[\xi]$.

<u>דוגמאות</u>

① $Id:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $[e],[\xi]$ בסיסים סטנדרטיים.

מטריצה של טרנספורמציה זהותית ביחס לבסיסים סטנדרטיים:

$$\underset{2\times 2}{A}_{Id}=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\end{bmatrix}=I_2$$

$\varphi(e_1)=e_1$, $\varphi(e_2)=e_2$ (קואורדינטות של $\varphi(e_i)$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.) לכן זה $(1\ 0)$

(2) $Id: F^n \to F^n$

$[e]=[\xi]$ (הבסיסים זהים אך לאו דווקא הסטנדרטיים) -

$Id(e_1)=e_1=\xi_1$

$Id(e_2)=e_2=\xi_2$

$$\underset{n\times n}{A}\, Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

(3) $Id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$e_1=(1,0) \quad \xi_1=(1,0)$ (ניתן לראות שהם בסיסים ולא הבסיסים הסטנד'.)

$e_2=(0,1) \quad \xi_2=(1,1)$

$Id(e_1)=e_1=\xi_1$

לכן העמודה הראשונה היא: $\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$

$Id(e_2)=-\xi_1+\xi_2$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) נקבע מטריצה $\underset{m\times n}{A}$. נתונה ה"ל $\varphi: F^n \to F^m$ שמוגדרת $\varphi(x)=Ax$

$[e],[\xi]$ - הבסיסים הסטנדרטיים.

נחשב את המטריצה של φ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים.

העמודה הראשונה של $A\varphi$:

$$\varphi(e_1)=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{matrix}} & \cdots & \begin{matrix} a_{1n} \\ \\ a_{mn}\end{matrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}$$ (קיבלנו את העמודה הראשונה של המטריצה)

נפרק אותה ביחס לבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}=\underline{a_{11}}\xi_1+\underline{a_{21}}\xi_2+\dots+\underline{a_{m1}}\xi_m$$

$$A\varphi=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\varphi(e_2)=\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2}\end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots a_{1n} \\ \cdots a_{2n} \\ \\ \cdots a_{mn}\end{matrix} \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}=\underline{a_{12}}\xi_1+\underline{a_{22}}\xi_2+\dots+\underline{a_{m2}}\xi_m$$

כלומר $\boxed{A\varphi=A}$

$$[e]=[e_1,\dots,e_n]$$

$$[\xi]=[\xi_1,\dots,\xi_m]$$

$$[\varphi(e)]=[\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)]$$

$$\boxed{[\varphi(e)]=[\xi]\cdot A_\varphi}$$

$$A_\varphi=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\dots&\alpha_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \alpha_{m1}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}$$

$$[\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)]=[\xi_1,\dots,\xi_m]\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\dots&\alpha_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \alpha_{m1}&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\varphi(e_1)=\underline{\alpha_{11}}\xi_1+\underline{\alpha_{21}}\xi_2+\dots+\underline{\alpha_{m1}}\xi_m$$

$$\varphi(e_2)=\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\dots+\alpha_{m2}\xi_m$$

מטריצה של טרנספורמציה לינארית מוגדרת ע"י נוסחה זאת באופן יחיד

כלומר $[\xi]A=[\xi]B \overset{[\xi]\ \text{בת"ל}}{\Longrightarrow} A=B$

<u>טענה</u>: תהי $\varphi: V\to W$ ט"ל, יהיו $[e]=[e_1,\dots,e_n]$ בסיס ב-V

$[\xi]=[\xi_1,\dots,\xi_n]$ בסיס ב-W.

תהי A_φ המטריצה של φ ביחס לבסיסים הנ"ל.

אז לכל $x\in V$ אם קואורד' $\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ ביחס ל-$[e]$, הקואורד' של $y=\varphi(x)$ ביחס ל-$[\xi]$ הן

$$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=A_\varphi\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

<u>הוכחה</u>

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n=[e_1,\dots,e_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[e]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$\varphi(x)=x_1\varphi(e_1)+\dots+x_n\varphi(e_n)=[\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=$$

$$=[\varphi(e)]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\underline{[\xi]A_\varphi\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}}$$

$$\varphi(x)=y_1\xi_1+\dots+y_m\xi_m=[\xi_1\dots\xi_m]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\underline{[\xi]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}}$$

קיבלנו

$$[\xi]\left(A_\varphi\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)=[\xi]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$$

$$[\xi]\left(A_\varphi\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\right)=\theta$$

משום ש-$[\xi]$ בת"ל, $A_\varphi\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$ <u>מש"ל</u>

$\varphi: V \to W$

$$\begin{array}{ccc} A & [e] \xrightarrow{C} & [\xi] \xrightarrow{B} \\ A' & [e'] & [\xi'] \end{array}$$

נסמן ב-C את מטריצת המעבר מ-e ל-e'

ונסמן ב-B את מטריצת המעבר מ-ξ ל-ξ'

משפט: $\boxed{A' = B^{-1}AC}$

הוכחה: $[e'] = [e]C$ (לפי הגדרה של מטריצת מעבר)

$[\xi'] = [\xi]B$

A זו מטריצה של φ בבסיסים e ו-ξ $\quad [\varphi(e)] = [\xi]A$

A' זו מטריצה של φ בבסיסים e' ו-ξ' $\quad [\varphi(e')] = [\xi']A'$

נסמן $C = (c_{ij})_{n\times n}$

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$$

$$\varphi(e_j') = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varphi(e_i) \quad \text{לכל } j=1,\dots,n$$

$$[\varphi(e')] = [\varphi(e)]C = \underline{[\xi]AC}$$

$$\overset{\shortparallel}{[\xi']A'} = \underline{[\xi]B}\cdot A'$$

משום ש-$[\xi]$ בת"ל $\quad B\cdot A' = AC \Longrightarrow A' = B^{-1}AC$ מש"ל

מסקנה: $\varphi: V \to V$

$$\begin{array}{ccc} A & [e] & [e] \\ & \downarrow C & \\ A' & [e'] & [e'] \end{array}$$

אזי $\boxed{A' = C^{-1}AC}$ (מקרה פרטי של המשפט הקודם)

משפט: תהי $\varphi: V \to W$ ט"ל

$A_\varphi \quad [e],[\xi]$

אזי $rk\, A_\varphi = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$

הוכחה:
$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$
$\qquad\qquad C_1 \qquad\quad C_n$

$$rk(A_\varphi) \overset{\shortparallel}{=} rk(A_\varphi)^t = \dim span\{C_1,\dots,C_n\} \overset{?}{=} \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$$ לפי הגדרה של rk

נתבונן בט"ל $f: W \to F^m$

$$f(w) = (w_1,\dots,w_n)$$
$$w = \sum_{i=1}^{m} w_i \xi_i$$

כיוון שהוכחנו ש-f איזומורפיזם, יתקיים מבחינה,

$$\underline{f(\mathrm{Im}\,\varphi)} = f(span(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))) = \underline{span(C_1,\dots,C_n)}$$

משום ש-f איזומורפיזם, לכל תת מרחב לינארי $L \subset W$

$$\dim f(L) = \dim L$$

(איזו' שומרים על מימדים) בפרט

$$\dim f(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$$

$$\dim f(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim \operatorname{span}(c_1, \dots, c_n) = rk\, A_\varphi^t = rk\, A_\varphi$$

<u>מש"ל</u>