13/3/08

## הרצאה 7

הגדרה: $\varphi: V_1 \to V_2$ נקראת טרנספורמציה לינארית אם

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ לכל $x,y\in V_1$

(2) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ לכל $x\in V_1$ , $\lambda\in F$

### דוגמאות

(1) $\varphi: V_1 \to V_2$

$\varphi(x)=\theta_2$ לכל $x\in V_1$

( $\theta_2$ - האיבר הניטרלי של $V_2$ )

צ"ל: $\varphi$ - ט"ל: $\theta_2=\varphi(x+y)\overset{?}{=}\varphi(x)+\varphi(y)=\theta_2+\theta_2=\theta_2$

לכן השוויון מתקיים.

$\theta_2=\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)=\lambda\cdot\theta_2=\theta_2$

(2) $Id: V \to V$

$Id(x+y)=x+y=Id(x)+Id(y)$

(3) יהי $V$ מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, נקבע $\mu\in F$ נגדיר $\varphi(x)=\mu x$ ט"ל

נבדוק שזה ט"ל: $\varphi(x+y)=\mu(x+y)$

$\varphi(x)+\varphi(y)=\mu x+\mu y=\mu(x+y)$

כלומר העתקה שומרת על חיבור

$\varphi(\lambda x)=\mu\cdot\lambda x$

$\lambda\cdot(\varphi x)\overset{}{=}\lambda\cdot\overset{''}{\mu} x$

ולכן העתקה שומרת גם על כפל בסקלר כי כפל השדה הוא קומוטטיבי

(4) $V=\mathbb{R}[x]$ מרחב של כל הפולינומים עם הדרגות - מ"ו

$\frac{d}{dx}:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ - ט"ל

$f\longmapsto f' \ \frac{df}{dx}$

נגזרת שומרת על כפל בסקלר $(\lambda f)'=\lambda f'$

נגזרת שומרת על סכום $(f+g)'=f'+g'$

(5) $V_1=F^n$

$V_2=F^m$

$\varphi:F^n\to F^m$

נקבע מטריצה $A\in Mat_{m\times n}(F)$: נגדיר העתקה $\boxed{\varphi(x):=\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x}}$ => ט"ל

$x\in F^n$ רשום כעמודה.

$$\varphi(x+y) \overset{?}{=} \varphi(x)+\varphi(y)$$

-דיסטריבוטיביות- $A(x+y) = Ax + Ay$

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax)$$

<u>הערה</u>: בהמשך נוכיח כי כל ה"ל $F^n \to F^m$ היא מצורה כזאת.

(6) $V = \mathbb{R}^2$. נקבע $a \in \mathbb{R}^2$ ($a \neq 0$). נתבונן $\varphi(x) = x + a$

(הזזה של וקטור $x$ בוקטור $a$). זו לא ה"ל מכיוון

שהיא לא שומרת על חיבור ועל כפל בסקלר, למשל

$$\varphi(x+y) = x+y+a$$

$$\varphi(x)+\varphi(y) = x+y+2a$$

<u>טענה</u>: תהי $\varphi: V_1 \to V_2$ ה"ל. אזי (א) $\varphi(\theta_1) = \theta_2$

(ב) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ לכל $x \in V_1$

<u>הוכחה</u>: (א) $\underline{\varphi(\theta_1)} = \varphi(0 \cdot \theta_1) = 0 \cdot \varphi(\theta_1) = \underline{\theta_2}$

(ב) $\varphi(-x) = \varphi(-1 \cdot x) = -1 \cdot \varphi(x) = -\varphi(x)$ <u>מש"ל</u>

<u>הערה</u> (1) $\varphi: V_1 \to V_2$ ה"ל

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in V_1$$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2) + \dots + \lambda_k \varphi(v_k)$$

(השתמשנו $k$ פעמים בכך ש $\varphi$ שומרת על חיבור ועל כפל בסקלר)

כלומר $\varphi$ שומרת על צירוף לינארי.

(2) אם $v_1, \dots, v_k \in V_1$ תלויה לינארית אזי

$\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k) \in V_2$ גם תלויה לינארית.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \theta_1$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ שלא כולם 0.

נפעיל $\varphi$: $\underline{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i)} = \varphi(\sum_i \lambda_i v_i) = \varphi(\theta_1) = \underline{\theta_2}$

ההפך לא נכון, למשל $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$$v_1 = (1,0) \mapsto 1$$

$$v_2 = (0,1) \mapsto 0$$

(התמונה היא כן תלויה לינארית)

<u>טענה</u>: הרכבה של ה"ל היא ה"ל.

<u>הוכחה</u>: $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$, $\varphi, \psi$ ה"ל. צ"ל $\psi \circ \varphi$ ה"ל.

$$(\psi\circ\varphi)(x+y)=\psi(\varphi(x+y))=\psi(\varphi(x)+\varphi(y))=\psi(\varphi(x))+\psi(\varphi(y))$$
$$=(\psi\circ\varphi)(x)+(\psi\circ\varphi)(y)$$

$$(\varphi\circ\psi)(\lambda x)=\psi(\varphi(\lambda x))=\psi(\lambda\varphi(x))=\lambda\psi(\varphi(x))=\lambda(\psi\circ\varphi)(x)$$ מ"ש

$f: X\to Y$ חח"ע ועל

$f^{-1}: Y\to X$

$$f\circ f^{-1}=Id_Y$$
$$f^{-1}\circ f=Id_X$$

לכל העתקה חח"ע ועל יש העתקה הפכית יחידה.

העתקות חח"ע ועל במקרה של טרנספורמציות לינאריות

**טענה:** נניח $\varphi: V_1\to V_2$ ה"ל, חח"ע ועל

אזי $\varphi^{-1}: V_2\to V_1$ גם ה"ל.

**הוכחה:** יהיו $w_1,w_2\in V_2$, צ"ל $\varphi^{-1}(w_1+w_2)\overset{?}{=}\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)$

נסמן $x_1=\varphi^{-1}(w_1)$, $x_2=\varphi^{-1}(w_2)$

$$\begin{cases}\varphi(x_1)=w_1\\ \varphi(x_2)=w_2\end{cases}$$

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=w_1+w_2$$
$$\varphi(x_1+x_2)=w_1+w_2$$
$$\underline{\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)}=x_1+x_2=\underline{\varphi^{-1}(w_1+w_2)}$$

נניח $w\in V_2$ $\varphi^{-1}(\lambda w)\overset{?}{=}\lambda\varphi^{-1}(w)$

נסמן $x=\varphi^{-1}(w)$

$$\varphi(x)=w$$
$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)=\lambda w$$

לכן $\lambda x=\varphi^{-1}(\lambda w)$

$$=\lambda\varphi^{-1}(w)$$ מ"ש

**הגדרה:**

(א) ה"ל שהיא חח"ע נקראת מונומורפיזם.

(ב) ה"ל שהיא על נקראת אפימורפיזם.

(ג) ה"ל שהיא על וחח"ע נקראת איזומורפיזם.

**טענה**

(א) הרכבה של מונומורפיזמים היא מונומורפיזם.

(ב) הרכבה של אפימורפיזמים היא אפימורפיזם.

(ג) הרכבה של איזומורפיזמים היא איזומורפיזם.

(ג נובע מ-א' ו-ב' ואת א' ו-ב' הוכחנו בעבר)

**הגדרה**: **גרעין** (Kernel) של ה"ל $\varphi: V_1 \to V_2$

$$V_1 \supset Ker\varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = \theta_2\}$$

**תמונה** (image)

$$V_2 \supset Im\varphi = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 .\ \varphi(x) = y\}$$

**טענה**: $Ker\varphi \subset V_1$ זה תת-מרחב לינארי (של $V_1$)

$Im\varphi \subset V_2$ תת-מרחב לינארי (של $V_2$)

**הוכחה**: $\theta_1 \in Ker\varphi$

$$x, y \in Ker\varphi \Longrightarrow x+y \in Ker\varphi$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \theta_2 + \theta_2 = \theta_2$$

יהי $x \in Ker\varphi$. $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\theta_2 = \theta_2$ לכן $\lambda x \in Ker\varphi$

$\Longleftarrow$ $Ker\varphi$ תת-מרחב לינארי.

$\theta_2 \in Im\varphi$

$w, z \in Im\varphi$ $\quad w = \varphi(x)$

$z = \varphi(y)$

$$w + z = \varphi(x+y) \in Im\varphi$$

לכן התמונה סגורה ביחס לחיבור. נוכיח ביחס לכפל:

יהי $w \in Im\varphi$. $\quad w = \varphi(x)$

$\lambda w = \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in Im\varphi$ מש"ל

**טענה**: תהי $\varphi: V_1 \to V_2$ ה"ל. $\varphi$ חח"ע $\Longleftrightarrow Ker\varphi = \{\theta_1\}$

**הוכחה**: $\boxed{\Longleftarrow}$ נניח $\varphi$ חח"ע

$$Ker\varphi = \varphi^{-1}(\theta_2) = \{\theta_1\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $Ker\varphi = \{\theta_1\}$. נניח $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \theta_2$$

$$\varphi(a-b) = \theta_2$$

$a - b \in Ker\varphi = \{\theta_1\} \Rightarrow a - b = \theta_1 \Rightarrow a = b$ מש"ל

**משפט**: יהי $\varphi: V \to W$ ה"ל. נניח $V$ ממימד סופי.
אזי $Im\,\varphi$ ממימד סופי, $\dim Im\,\varphi + \dim Ker\,\varphi = \dim V$

**למה**: יהי $e_1,\dots,e_m$ בסיס של $Ker\,\varphi$. נשלים אותה
עד לבסיס של $V$ ע"י וקטורים $e_{m+1},\dots,e_n$.
אזי $(*)$ $\varphi(e_{m+1}),\dots,\varphi(e_n)$ בסיס של $Im\,\varphi$.

**הערה**: מהלמה הנ"ל מיד נובע המשפט.

$\dim Im\,\varphi = n-m$ $\quad \dim V = n$
$\dim Ker\,\varphi = m$

**הוכחת הלמה**: נוכיח ש- $(*)$ פורשת את $Im\,\varphi$.

יהי $y \in Im\,\varphi$. $y=\varphi(x)$ $\quad x \in V$

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i$$

$$y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{=\theta_2} + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i)$$

נוכיח כי $(*)$ בת"ל. נניח כי $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \theta_2$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i \in Ker\,\varphi \iff \varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \theta_2$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i \implies \sum_{i}^{m} -\mu_i e_i + \sum_{m+1}^{n} \lambda_i e_i = \theta_2$$

אבל $e_1,\dots,e_n$ בת"ל. לכן: $\mu_i = 0$ לכל $i$;
$\lambda_j = 0$ לכל $j$

לכן $\varphi(e_{m+1}),\dots,\varphi(e_n)$ בת"ל. מש"ל

**משפט**: נניח $V,W$ מ"ו מאותו מימד סופי.
יהי $\varphi: V \to W$ ה"ל. אזי הטענות הבאות שקולות!
(א) $\varphi$ אפימורפיזם.
(ב) $\varphi$: מונומורפיזם.
(ג) $\varphi$ איזומורפיזם.

**הוכחה**: (א) $\Leftarrow$ (ב) נניח $\varphi$ - על. $Im\,\varphi = W$. צ"ל: $Ker\,\varphi = \{\theta_V\}$
(הוכחנו קודם ש- $\varphi$ מונומורפיזם $\iff$ הגרעין טריוויאלי) $\Updownarrow$

$\dim Ker\,\varphi = 0$

$\dim Ker\,\varphi = \dim V - \dim Im\,\varphi = \dim V - \dim W = 0$

נשאר להוכיח (ב) <= (א)

צ"ל $\operatorname{Im}\varphi = W \iff \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim W$

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \underbrace{\dim \operatorname{Ker}\varphi}_{=0} = \dim V = \dim W$$

מש"ל

ג) נובע ישירות מ- א ו-ב )

<u>הגדרה</u>: שני מ"ו $V,W$ נקראים איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם $\varphi: V \to W$ ביניהם.

סימון: $V \cong W$ זה יחס שקילות:

(1) $V \cong V$

(2) אם $V \cong W \Rightarrow W \cong V$

(3) אם $V \cong W,\ W \cong Z \Rightarrow V \cong Z$.

<u>הוכחה</u>

(1) $Id: V \to V$ איזו

(2) $\varphi: V \xrightarrow{\cong} W \Rightarrow \varphi^{-1}: W \xrightarrow{\cong} V$ ($\varphi^{-1}$ - איזומורפיזם)

(3) $\underbrace{V \xrightarrow[\cong]{\varphi} W \xrightarrow{\psi} Z}_{\psi\circ\varphi\ \cong}$

<u>משפט</u>: יהיו $V,W$ מ"ו ממימד סופי. אזי $V \cong W \iff \dim V = \dim W$

<u>טענה</u>: (א) אם $\varphi: V \to W$ חח"ע, אזי תמונה של כל סדרה בת"ל היא בת"ל.

(ב) אם $\varphi: V \to W$ על, אזי תמונה של כל סדרה פורשת היא סדרה פורשת.

<u>הוכחת הטענה</u>

(א) תהי $v_1,\dots,v_k \in V$ בת"ל. צ"ל $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k) \in W$ בת"ל.

נניח $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_W$. $\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \theta_W \overset{\varphi\ \text{חח"ע}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \theta_V$

$\Downarrow$

$\lambda_i = 0$ לכל $i$