$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

$$\det A=\sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n)\, a_{1,j_1} a_{2,j_2}\dots a_{n,j_n}$$

$(j_1,j_2,\dots,j_n)$ - תמורות

$$\underset{\pm 1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{sgn}(j_1,j_2,\dots,j_n)}}=\det(L_{j_1},L_{j_2},\dots,L_{j_n})$$

כאשר $L_j=(0,\dots,0\underset{\underset{j}{\uparrow}}{1}0\dots0)$

<u>משפט</u>: $\operatorname{sgn}(j_1,j_2,\dots,j_n)=(-1)^{\#\text{היפוכים}}$

עבור $p<q$: j_p, j_q סדר אם $j_p<j_q$

היפוך אם $j_p>j_q$

<u>דוגמה</u>

$n=5$ $\operatorname{sgn}(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=(-1)^0=1$ (מספר ההיפוכים הוא 0)

$\operatorname{sgn}(5\ 4\ 3\ 2\ 1)=(-1)^{\binom{5}{2}}=(-1)^{10}=1$

$\left(\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\right)$

<u>הוכחת המשפט</u> - באינדוקציה על n

אם <u>$n=1$</u> - (אין היפוכים לכן אין מה להוכיח) ברור

<u>$n-1$</u> $\to n$ $\quad \sigma=(j_1,j_2,\dots,\underset{\underset{k}{\shortparallel}}{n},\dots,j_n)$

יהי k המספר כך ש $j_k=n$

(j_p,n) סדר עבור $p<k$

(n,j_p) היפוך עבור $p>k$

נתבונן בתמורה החדשה:

$$\sigma'=(j_1,j_2\dots j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_n,n)$$

$$(*)\quad \#(\text{היפוכים של } \sigma)=\#(\text{היפוכים של } \sigma')+(n-k)$$

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{vmatrix} - L_1 - & 0\\ \vdots & \\ - L_{k-1} - & 0\\ 0\ 0\ \dots & 1\\ - L_{k+1} - & 0\\ \vdots & \\ - L_n - & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n-k}\begin{vmatrix} - L_1 - & 0\\ \vdots & \\ - L_{k-1} - & 0\\ - L_{k+1} - & 0\\ \vdots & \\ - L_n - & 0\\ 0\ \dots & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n-k}(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} - L_1' - \\ \vdots \\ - L_{k-1}' - \\ - L_{k+1}' - \\ \vdots \end{vmatrix}$$

כאשר L_j' זאת שורה שמתקבלת מ- L_j ע"י מחיקת 0 במקום האחרון

שיעור 13
28.2.08
②

$$= (-1)^{n-k} \operatorname{sgn}(j_1,\dots,j_{k-1} j_{k+1},\dots,j_n) \overset{\downarrow}{=} (-1)^{n-k}\cdot(-1)^{\#(j_1 \dots j_{k-1} j_{k+1},\dots,j_n)} = (-1)^{n-k}(-1)^{\#(\sigma' \text{ של היפוכים})}$$

$$\overset{(*)}{=} (-1)^{\#(\sigma \text{ היפוכים})}$$

מש"ל

דוגמה (לחישוב זוגיות של תמורה)

n=2 (א) ניקח את התמורה 1,2 $\sigma=[1,2]$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(ב) $\sigma=[2,1]$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

דוגמה לחישוב det של מטריצה 2x2 ; $n=2$

$$\det A = (+1)\cdot a_{1,1}\cdot a_{2,2} + (-1) a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$j_1=1,\ j_2=2 \qquad j_1=2,\ j_2=1$

כאשר $n=3$ יש 6 תמורות (3!) ואז נכתוב את ה-det לפי הנוסחא של התמורות נקבל אותה נוסחא מהמקודם.

n=3 : נרשום את כל התמורות ונחשב את הזוגיות של כל תמורה:

$\operatorname{sgn}(1\ 2\ 3) = (-1)^0 = 1$ בתמורה זו אין היפוכים

$\operatorname{sgn}(1\ 3\ 2) = (-1)^1 = -1$

$\operatorname{sgn}(2\ 1\ 3) = (-1)^1 = -1 \longrightarrow$ יש 3 זוגות לבדוק - יש רק זוג אחד שהוא היפוך - 2 1

$\operatorname{sgn}(2\ 3\ 1) = (-1)^2 = 1 \longrightarrow$ 3 1 , 2 1 היפוכים

$\operatorname{sgn}(3\ 1\ 2) = (-1)^2 = 1$

$\operatorname{sgn}(3\ 2\ 1) = (-1)^3 = -1$ במקרה זו כל זוג הוא היפוך

בנוסחא של det לפי הזוגיות של התמורות $j_1,j_2,\dots,j_n$ מספרים שונים בזוגות בין 1 ל-n.

נתבונן $X=\{1,2,\dots,n\}$

$\sigma=(j_1,j_2,\dots,j_n)$. אפשר להתבונן ב-$\sigma$ כהעתקה: $\sigma: X_n \longrightarrow X_n$

$1 \longmapsto j_1$

$2 \longmapsto j_2$

$\vdots$

$n \longmapsto j_n$

σ היא העתקה חח"ע ועל כי היא מקבוצה סופית לעצמה

(זה אומר של מספר מ-1 עד n מופיעים)

אלגברה לינארית
שיעור 13 28.2.08
3

<u>הגדרה</u>: תמונה העתקה $\sigma: X_n \to X_n$ חח"ע ועל

σ מגדירה תמורה $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$.

<u>סימון</u>: אוסף כל התמורות מאורך n נסמן ב- Σ_n

$|\Sigma_n| = n!$ ($n!$ איברים)

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)}, \ldots, a_{n,\sigma(n)}$$

<u>טענה</u>: הרכבה של תמורות זה תמורה (כלומר חח"ע ועל)

אם $\sigma_1, \sigma_2 : X_n \to X_n$ חח"ע ועל אזי $\sigma_1 \circ \sigma_2 : X_n \to X_n$

(הרכבה של העתקות חח"ע היא גם העתקה חח"ע)

<u>הוכחה</u>: ① נניח שיש $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ f,g חח"ע אזי $g \circ f$ גם חח"ע. נניח $(g\circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

$$x = x' \overset{f \text{ חח"ע}}{\Leftarrow} f(x) = f(x') \overset{g \text{ חח"ע}}{\Leftarrow} g(f(x)) = g(f(x'))$$

② נניח שיש $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ f,g על אזי $g \circ f$ גם על.

(במקרה שלנו מיידי שההרכבה סופית והחח"ע גורר שהיא על)

ניקח $z \in Z$. קיים $y \in Y$ כך ש $g(y) = z$. (כי g על)

כמו כן, קיים $x \in X$ כך ש $f(x) = y$ (כי f על). לכן

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ <u>מ.ש.ל.</u>

<u>משפט</u> (כפליות של זוגיות)

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2)$$

<u>הוכחה</u>: עבור תמורה $\sigma \in \Sigma_n$ נסמן ב- A_σ מטריצה שהעמודה ה-j-ית שלה היא

$$\sigma(j) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = (L_{\sigma(j)})^t$$

אנו טוענים ש $A_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = A_{\sigma_1} \cdot A_{\sigma_2}$

$$\operatorname{sgn} \sigma = \det [L_{\sigma(1)}, L_{\sigma(2)}, \ldots, L_{\sigma(n)}) = \det (A_\sigma^t) = \det A_\sigma$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \det A_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \det(A_{\sigma_1} A_{\sigma_2}) = \det A_{\sigma_1} \cdot \det A_{\sigma_2} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot \operatorname{sgn}\sigma_2$$

$$(A_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 , & i = \sigma(j) \\ 0 , & i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

$$(A_{\sigma_1 \circ \sigma_2})_{ij} = \delta_{i,(\sigma_1 \circ \sigma_2)(j)} = \sum_{k=1}^{n} (A_{\sigma_1})_{ik} (A_{\sigma_2})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma_1(k)} \delta_{k,\sigma_2(j)}$$

$$\overset{k=\sigma_2(j)}{=} \delta_{i,\sigma_1(\sigma_2(j))} = \delta_{i,(\sigma_1 \circ \sigma_2)(j)} = (A_{\sigma_1 \circ \sigma_2})_{ij}$$

<u>מ.ש.ל.</u>

אלגברה לינארית-שיעור
28.2.08 (4)

מבוא לשדות

במקום סקלרים - מספרים ממשיים, נעסוק כעת במספרים מרוכבים. $\mathbb{C}$

$$\det: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

אותן תכונות של det נשמרות - רק עבור מספרים מרוכבים.

למשל - לינאריות ביחס לשורה:

$$\det[\lambda R_1, R_2, \dots, R_n] = \lambda \det[R_1, R_2, \dots, R_n]$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

<u>הגדרה</u>: <u>שדה</u> זהו קבוצה F עם שתי פעולות

$\varphi: F\times F \to F$, $\psi: F\times F \to F$ שמקיימות את התכונות הבאות:

$\varphi(a,b) = a+b$, $\psi(a,b) = a\cdot b$

1) קומוטטיביות של חיבור: $a+b=b+a$ לכל $a,b\in F$
2) אסוציאטיביות של חיבור: $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור: קיים איבר $0\in F$ כך ש $a+0=a=0+a$ לכל $a\in F$
4) קיום איבר נגדי: לכל $a\in F$ קיים $b\in F$ כך ש $a+b=0$.
5) קומוטטיביות של כפל: $ab=ba$ לכל $a,b\in F$
6) אסוציאטיביות של כפל: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(bc)$ לכל $a,b,c\in F$
7) קיום של איבר ניטרלי ביחס לכפל: $a\cdot 1=a$ לכל $a\in F$.
8) דיסטריביוטיביות $a\cdot(b+c)=ab+ac$ לכל $a,b,c\in F$
9) קיום של איבר הופכי: לכל $a\neq 0$ קיים $b\in F$ כך ש $ab=1$
10) $0\neq 1$

<u>דוגמאות</u> (של שדות ולא שדות)

1) $\mathbb{R}$ (קבוצת המספרים הממשיים עם פעולות של כפל וחיבור הידועות) זה שדה.
2) $\mathbb{C}$ - שדה
3) $\mathbb{Q}$ - שדה
4) $\mathbb{Z}$ לא שדה כי כל התכונות חוץ מ-(9) מתקיימות. (למשל $2\in\mathbb{Z}$ אך $\neg\exists b\in\mathbb{Z}.\ 2b=1$)
5) $\mathbb{N}$ - לא שדה: אין איבר ניטרלי ביחס לחיבור
6) $\mathbb{N}\cup\{0\}$ - לא שדה: אין נגדי ל-1