אלגברה
לינארית 1

26.02.08 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $\det: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}a_{nj}\det\underbrace{M_{nj}(A)}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$\det A\neq 0 \iff$ הפיכה A $\iff rkA=n$

משפט: $\det A^t=\det A$

הערה: אם למטריצה A יש עמודת אפסים, אז $\det A=0$.

הוכחה: ל-A יש עמודת אפסים $\Leftarrow$ $rkA<n$. (כי $rkA=rkA^t$)
$\Leftarrow \det A=0$ □

הוכחת משפט: $A=\varphi_1(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_k(I)\cdot A_1$ (מדורגת קנונית) $\Leftarrow$ $\det A=\det\varphi_1(I)\cdot\ldots\cdot\det\varphi_k(I)\cdot\det A_1$

$A^t=A_1^t\cdot\varphi_k(I)^t\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)^t$ $\Leftarrow$ $\det A^t=\det\varphi_1(I)^t\cdot\ldots\cdot\det\varphi_k(I)^t\det A_1^t$

מספיק להוכיח: I) $\det A_1^t\overset{?}{=}\det A_1$

II) $\det\varphi(I)^t=\det\varphi(I)$ לכל פעולה אלמנטרית φ.

I) מקרה א': $A_1=I$ $\Leftarrow$ $A_1^t=A_1$

מקרה ב': ל-A_1 יש שורת אפסים $\Leftarrow$ $\det A_1=0$

ל-A_1^t יש עמודת אפסים $\Leftarrow$ $\det A_1^t=0$

II) פ"א 2: $\varphi: R_i\to\lambda R_i$

$$\begin{array}{c c} & \\ i & \end{array}\varphi(I)=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\varphi(I)^t=\varphi(I)}$

פ"א 1: $\varphi: R_i\leftrightarrow R_j$

$$\varphi(I)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array}\\ \hline \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$\boxed{\varphi(I)^t=\varphi(I)}$

מטריצה סימטרית

אלגברה לינארית - שיעור

26.2.08

פ"א 3: $\varphi: R_i \to R_i + \lambda R_j$

$$\varphi(I) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \varphi(I) = 1$$

$$(\varphi(I))^t = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & \ddots & & \\ & \lambda & & 1 & \\ & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

דוגמאות:

1) $$\det \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

2) $$\det(\lambda \cdot \underset{n\times n}{A}) = \lambda^n \det A$$

3) $$\det \begin{bmatrix} a_1 & * & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & a_{n-1} & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = a_1 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$$

אינדוקציה ב-n:

$n=1$ ברור

$n-1 \leftarrow n$

$$\det A = (-1)^{n+n} a_n \det M_{nj}(A) =$$

$$= a_n \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & * \\ 0 & \ddots \; a_{n-1} \end{bmatrix} = a_1 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$$

$\square$

משפט: (1) (פיתוח לפי שורה i-ית)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}(A)$$

(2) (פיתוח לפי עמודה j-ית)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}(A)$$

אלגברה לינארית - שיעור

26.2.08

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

<u>הוכחה 1:</u> נתבונן במטריצה B שמתקבלת מ-A ע"י הורדה של שורה i-ית למקום האחרון.

$$\det A=(-1)^{n-i}\det B=$$

$$=(-1)^{n-i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}a_{ij}\underbrace{M_{nj}(B)}_{M_{ij}(A)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-i}a_{ij}\det M_{ij}(A)$$

<u>הוכחה 2:</u> מפעילים 1) על A^t. $\square$

נוסחה עבור det של מטריצת 3x3:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} +$$

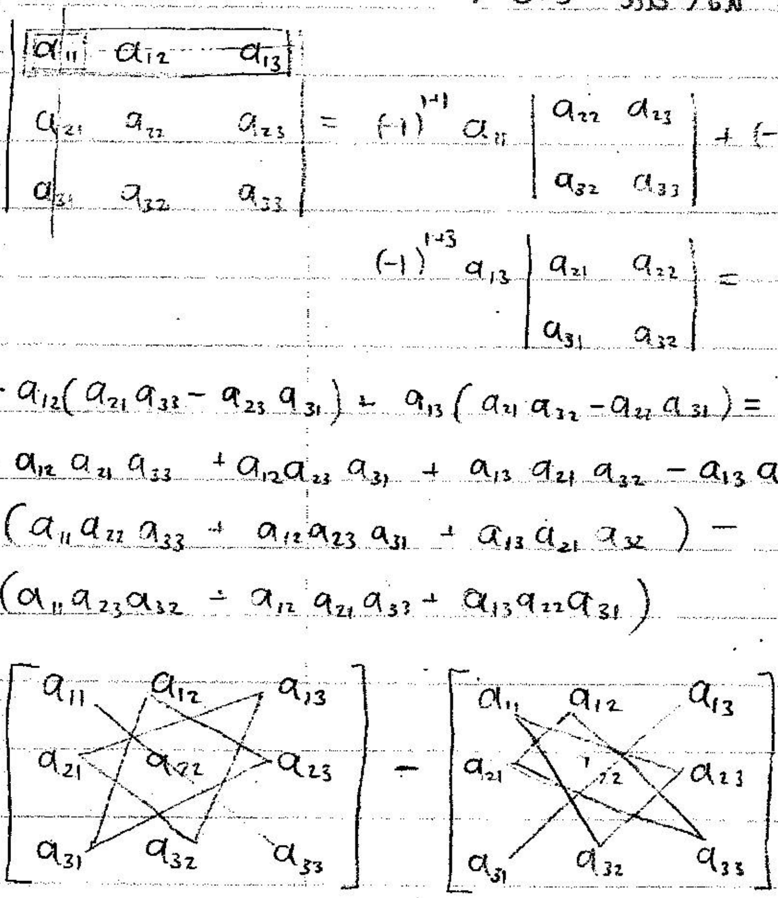
$$(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{33}a_{32})$$

$$-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-$$

$$(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31})$$



אלגברה לינארית - שעיר

26.2.08

נוסחה מפורשת עבור det מסדר כלשהו:

סימון:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \qquad R_i=[a_{i1}\dots a_{in}]$$

$$L_j=[0\dots 0\underset{\uparrow\, j}{1}0\dots 0]$$

$$R_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}L_j$$

$$\det A=\det[R_1,R_2,\dots,R_n]=$$

$$\det\left[\sum_{j_1} a_{1j}L_{j_1},\ \sum_{j_2} a_{2j}L_{j_2},\dots,\sum_{j_n} a_{nj_n}L_n\right]=$$

n^n איברים $$\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n}^{n} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\det[L_{j_1},L_{j_2},\dots,L_{j_n}]=$$

$n!$ איברים $$\sum_{\substack{j_1,\dots,j_n\\ \text{שונים בזוגות}}} a_{1,j_1},a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}\underbrace{\det[L_{j_1}L_{j_2},\dots,L_{j_n}]}_{=\ \pm 1\ =\ Sign(j_1,j_2,\dots,j_n)}$$

$n!$ מחוברים $$\det A=\sum_{\substack{\text{תמורות}\\(j_1,j_2,\dots,j_n)}} Sign(j_1,j_2,\dots,j_n)\,a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$$

חישוב של $Sign(j_1,j_2,\dots,j_n)$

הגדרה: נתונה תמורה $j_1,j_2,\dots,j_n$.

עבור $1\le p<q\le n$ נגיד שאיברים j_p,j_q

מהווים <u>סדר</u> אם $j_p<j_q$

״ היפוך אם $j_p>j_q$

משפט: $$Sign(j_1,j_2,\dots,j_n)=(-1)^{\#\text{היפוכים}}$$

הגדרה: תמורה מסדר n זאת סדרה (באורך n) של איברים שונים מ-1 עד n.

דוגמאות:

$n=1$: 1

$n=2$: 1,2   2,1

$n=3$: 1,2,3   2,3,1

1,3,2   3,1,2

2,1,3   3,2,1