21/2/08 הרצאה 10 - אלגברה לינארית

(1)

<u>הגדרה</u>: $A_{m\times n}$. דרגה של $A$ זה מימד של span של השורות של $A$.

$0 \le rk A \le \min\{m,n\}$

<u>למה</u>: למטריצות שקולות שורות יש אותה דרגה.

<u>הוכחה</u>: נסמן שורות של $A_{m\times n}$ ב- $R_1,R_2,\dots,R_m \in \mathbb{R}^n$ (נקודות שלכל פעולה אלמנטרית המימד של span לא משתנה, בעצם ה-span עצמו לא משתנה)

$$rk A = \dim(\text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m))$$

(1) $R_i \leftrightarrow R_j$ · אותו span

(2) $R_i \to \lambda R_i$ $\quad \lambda \neq 0$

לשם פשטות הסימון, נניח $i=1$. נוכיח:

$$x \in \text{span}(\lambda R_1, R_2,\dots,R_m) = \text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m)$$

נוכיח הכלה דו כיוונית: $\boxed{\subseteq}$:

$$x = (\lambda_1\lambda)R_1 + \lambda_2R_2 + \dots + \lambda_mR_m \in \text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m)$$

$\boxed{\supseteq}$: $R_1 = \frac{1}{\lambda}(\lambda R_1)$

לכן כפי שהוכחנו $\text{span}(\frac{1}{\lambda}(\lambda R_1),R_2,\dots,R_m) \subseteq \text{span}(\lambda R_1,R_2,\dots,R_m)$

לכן יש שוויון, כלומר $\text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m) = \text{span}(\lambda R_1,R_2,\dots,R_m)$

כלומר הפעולה הבסיסית השנייה לא משנה את ה-span לכן הדרגה לא משתנה.

(3) $R_i \to R_i + \lambda R_j$. נניח (בה"כ) $i=1$, $j=2$ ונוכיח:

$$x \in \text{span}(R_1+\lambda R_2, R_2,\dots,R_m) = \text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m)$$

שוב נוכיח הכלה דו כיוונית: $\boxed{\subseteq}$

$$x = \lambda_1(R_1+\lambda R_2) + \lambda_2R_2 + \dots + \lambda_mR_m = \lambda_1R_1 + (\lambda_1\lambda+\lambda_2) + \dots + \lambda_mR_m \in \text{span}(R_1,R_2,\dots,R_m)$$

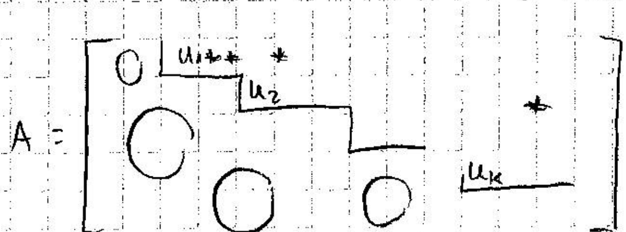
$\boxed{\supseteq}$ $\quad R_1 = (R_1+\lambda R_2) + (-\lambda)R_2$

לכן יש שוויון. <u>מש"ל</u>

<u>למה</u>: תהי $A$ מטריצה <u>בצורה מדורגת</u>. אזי $rkA$ שווה למספר שורות שונות מ-0.

<u>הוכחה</u>

$rkA \le k$



מספיק להוכיח ששורות שונות מ-0 [illegible]



נניח שצירוף לינארי של השורות מתאפס:

$$\lambda_1[0\dots 0\,u_1 * \dots *]+$$
$$+\lambda_2[0\dots 0\,0\,u_2 * \dots]+$$
$$\dots$$
$$+\lambda_k[0\dots 0\,0\,0\,0\,u_k *]=[0\dots 0]$$

$\lambda_1 u_1=0,\ u_1\neq 0$ לכן $\lambda_1=0$

ומכאן נובע שהשורה $\lambda_1[\quad]$ מתאפסת. נסתכל על השורה השנייה: בקואורדינטה של $u_2$ שאר הוקטורים מתאפסים ולכן

$\lambda_2 u_2=0,\ u_2\neq 0 \Rightarrow \lambda_2=0$ מש"ל

**דוגמה**

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&4\\3&4&6\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}$$

נחשב את הדרגה של $A$ לפי השיטה שהסברנו - נביא את המטריצה לצורה מדורגת:

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ומכאן ש- $rkA=2$.

**משפט** $rkA=rkA^t$

**למה** $rkA^t$ לא משתנה ע"י פעולות אלמנטריות על שורות $A$.

**הוכחה** נסמן $l=rkA^t$. ניתן לבחור $l$ עמודות של $A$ שמהווים בסיס של span של העמודות של $A$. לשם פשטות הסימון (ללא הגבלת הכלליות) נניח שאלה $l$ העמודות הראשונות של $A$.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\dots a_{1l}\dots a_{1n}\\ \dots\\ a_{m1}\quad a_{ml}\dots a_{mn}\end{bmatrix}$$

נסמן: $\underbrace{C_1 \quad\dots\quad C_l}$

(3) $R_i\xrightarrow{\varphi}R_i+\lambda R_j$

$$\varphi(A)=\begin{bmatrix}a_{11}\dots & a_{1l} & a_{1n}\\ a_{i1}+\lambda a_{j1}\dots & a_{il}+\lambda a_{jl} & a_{in}+\lambda a_{jn}\\ a_{m1} & a_{ml} & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$\underbrace{C_1' \quad\dots\quad C_l'}$

נניח כי $c_1',\dots,c_l'$ בת"ל. נניח $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_l c_l = 0$

$$\mu_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + \mu_l \begin{bmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{il}+\lambda a \\ \vdots \\ a_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

אם נוכיח אי תלות לינארית (זה אומר $rk(\varphi(A)^t) \ge l = rkA^t$)

$$\begin{cases} a_{11}\mu_1 + \dots + a_{1l}\mu_l = 0 \\ \vdots \\ (a_{i1}+\lambda a_{j1})\mu_1 + \dots + (a_{il}+\lambda a_{jl})\mu_l = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\mu_1 + \dots + a_{ml}\mu_l = 0 \end{cases} \xrightarrow{i-\lambda(j)} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{bmatrix}\mu_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{il} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{bmatrix}\mu_l = 0$$

$c_1,\dots,c_l$ בת"ל $\Leftarrow$ $\mu_1=\dots=\mu_l=0$ $\Leftarrow$ $c_1',\dots,c_l'$ בת"ל.

הוכחנו: $rk((\varphi(A))^t) \ge rkA^t$ עבור $\varphi$ מסוג (3).

באופן דומה מוכיחים עבור $\varphi$ מסוגים (1), (2)

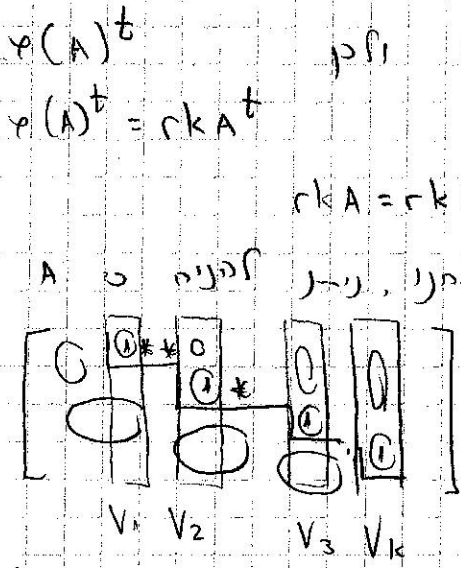
$\Leftarrow$ לכל $\varphi$ $rk\,\varphi(A)^t \ge rkA^t$

אבל $A=\varphi^{-1}(\varphi(A))$ ולכן $rkA^t \ge rk\,\varphi(A)^t$

ומכאן נקבל שוויון: $rk\,\varphi(A)^t = rkA^t$, מש"ל

<u>הוכחת המשפט</u> $rkA = rkA^t$

לפי שתי הלמות שהוכחנו, ניתן להניח כי $A$ היא בצורה מדרגית קנונית.

$A =$ 

$k = rkA$

נוכיח כי $V_1,\dots,V_k$ בת"ל.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad V_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k$$

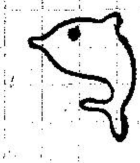
נניח $\mu_1V_1+\mu_2V_2+\dots+\mu_kV_k=0$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\mu_1=\dots=\mu_k=0$

לכן $rkA^t \ge k = rkA$ . $A=(A^t)^t$ ולכן:

$rkA = rk(A^t)^t \ge rkA^t$ , מש"ל



21.2.98 (4)

**משפט**: תהי $A_{n\times n}$ ... $A$ הפיכה ...

**הוכחה**: נזכיר כי $rkA$ ותכונת הפיכות לא משתנים עם פעולות אלמנטריות על השורות. לכן ניתן להניח כי $A$ מדורגת קנונית.

**מקרה א'**: $A=I$ - $A$ הפיכה, $rkA=n$

**מקרה ב'**: ל-$A$ יש שורת אפסים. - $A$ לא הפיכה, $rkA<n$. **מש"ל**.

## דטרמיננטות

(זו פונקציה על מרחב המטריצות הריבועיות) $\det : \underbrace{M_n(R)}_{\text{מרחב המטריצות הממשיות } n\times n} \to R$

$\det A \in R$

$R_1,\ldots,R_n \in R^n$, נסמן ב- $[R_1,\ldots,R_n]$ מטריצה עם שורות $R_1,\ldots,R_n$.

**הגדרה**: **דטרמיננטה** זאת פונקציה $\det : M_n(R) \to R$ שמקיימת:

1) לינאריות ביחס לכל שורה.

(א) $\det[R_1,\ldots,R_i'+R_i'',\ldots,R_n] = \det[R_1,\ldots,R_i',\ldots,R_n] + \det[R_1\ldots R_i''\ldots R_n]$

(ב) $\det[R_1\ldots,\lambda R_i,\ldots R_n] = \lambda \det[R_1\ldots R_i\ldots R_n]$

2) אם למטריצה $A$ יש שתי שורות שוות אז $\det A = 0$

3) (נירמול) $\det(I_n)=1$

**משפט**: לכל $n$ $\det : M_n(R) \to R$ קיימת ויחידה.

**$n=1$** - נוכיח את המשפט עבור המטריצות מסדר $1\times 1$

$$M_1(R)=R$$

$$\det(a)=a$$

---

$$\det[a] = \det[a\cdot 1] \overset{1ב}{=} a\det[1] \overset{3}{=} a$$

**$n=2$** $\qquad \det : M_2(R) \to R$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det[R_1, R_2] \;(=)$$

$$R_1 = a_{11}[1,0] + a_{12}[0,1]$$

$$R_2 = a_{21}[1,0] + a_{22}[0,1]$$

$(=)\; \det[a_{11}[1,0]+a_{12}[0,1], R_2] \overset{1א}{=} \det[a_{11}[1,0], R_2] + \det[a_{12}[0,1], R_2] \overset{1ב}{=}$

$= a_{11}\det[[1,0], R_2] + a_{12}\det[[0,1], R_2] =$

$= a_{11}\det[[1,0], a_{21}[1,0]+a_{22}[0,1]] + a_{12}\det[[0,1], a_{21}[1,0]+a_{22}[0,1]] =$

$= a_{11}\left(a_{21}\det\left[\cancel{[1,0]},[1,0]\right] + a_{22}\det\left[[1,0],[0,1]\right]\right)$

$+ a_{12}\left(a_{21}\det\left[[0,1],[1,0]\right] + a_{22}\det\left[\cancel{[0,1],[0,1]}\right]\right)$

$= a_{11}a_{22}\underbrace{\det I_2}_{=1} + a_{12}a_{21}\underbrace{\det\left[[0,1],[1,0]\right]} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}\det\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} =$

<u>למה</u>: נניח $\det$ קיימת. תהי $\varphi$ פעולה אלמ' של החלפת שתי שורות אזי: $\det\varphi(A) = -\det A$

$\overset{\text{למה}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

<u>הוכחה</u>: $\varphi: R_i \to R_j$. ניתן להניח $i=1$, $j=2$

$0 = \det[R_1+R_2, \underline{R_1+R_2}, R_3, \dots, R_n]$ (עבור שורה ראשונה)

(עבור שורה שניה) $\overset{\text{לב}}{=} \det[\underline{R_1+R_2}, R_1, R_3 \dots] + \det[R_1+R_2, R_2, R_3 \dots] \overset{\text{לב}}{=}$

$= \cancel{\det[R_1, R_1, R_3 \dots]} + \det[R_2, R_1, R_3] + \det[R_1, R_2, R_3 \dots] + \cancel{\det[R_2, R_2, R_3 \dots]} =0$

$\det[R_1, R_2, R_3 \dots] = -\det[R_2, R_1, R_3]$