משפטים ואקסיומות באלגברה לינארית

1 שקילויות

1. עבור $A \in F^{n\times n}$, הנ"ל שקולות

(א) A הפיכה

(ב) עבור כל $b \in F^n$, ל-$Ax=b$ פתרון יחיד.

(ג) $\text{rank}A=n$

(ד) A קולה בשורות (עמודות) ל-I. הצורה הקנונית של A היא I.

(ה) מרחב השורות (עמודות) של A הוא F^n.

(ו) למערכת $Ax=0$ יש רק הפטרון הטרבייאלי

(ז) A^t הפיכה

(ח) A היא מכפלה של אלמנטריות.

(ט) ההעתקה $T(x)=Ax$ בין 2 בסיסים שווי מימד היא:

i. חד חד ערכית

ii. לא סינגולרית

iii. על

iv. הפיכה

2 שדות

2.1 הגדרת השדה

1. שדה הוא קבוצה המקיימת

(א) סגירות תחת חיבור וכפל

(ב) קומטטיביות בחיבור ובכפל

(ג) אסוציאטיביות בחיבור ובכפל

(ד) קיים 0 נייטרלי לחיבור.

(ה) קיים נגדי, בששכום איתו - 0.

(ו) קיים 1 נייטרלי לכפל.

(ז) קיים הופכי שמכפלה איתו - 1.

(ח) דיסטרביוטיביות.

2. ה-0, וה-1 בשדה הם יחידים.

2.2 השדה z_n

אם n ראשוני, אזי קבוצה שאבריה הם $0,1,\dots,n-1$ והפעולות המוגדרות עליה הן:

- כפל: $a\otimes b=(ab)(\mod n)$
- חיבור: $a\oplus b=(a+b)(\mod n)$

הוא שדה.

1. האיבר הנגדי תחת z_n: $(-a)=n-1$
2. האיבר ההופכי: $a^{-1}=\frac{(n+1)k}{a}$

2.3 מרוכבים $i^2=(-1)$

1. $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\text{cis}\theta$
2. $\text{Re}z=a, \text{Im}z=b$.
3. $r^2=a^2+b^2, \tan\theta=\frac{b}{a}$
4. $\bar z=a-bi=r\text{cis}(-\theta)$
5. $\overline{z_1z_2}=\bar z_1\bar z_2, \overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2, z-\bar z=2\text{Im}z, z+\bar z=2\text{Re}z$.
6. $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|. |z|^2=r^2=z\bar z$
7. $z_1\cdot z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=r_1\cdot r_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$
8. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar z_2}{z_2\bar z_2}=\frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$
9. $z^n=r^n\text{cis}(n\theta)$
10. $(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\text{cis}\frac{\theta+2\pi k}{n}$

3 פולינומים

1. הערה: ראה דף עזר 1.

2.

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

הוא פולינום ממעלה n (מסומן $\deg P_n(x)=n$). a_n המקדם המוביל.

3. אוסף הפולינום ממעל שדה F בדרגה של n מסומן ב-$F_n[x]$.

4.

$$\begin{aligned}\deg\left[P_n(x)+Q_m(x)\right] &\le \max\left[\deg P_n(x), Q_m(x0\right]\\ \deg\left[P_n(x)\cdot Q_m(x)\right] &= \deg P_n(x)+\deg Q_n(x)\end{aligned}$$

5. לכל שני פולינום $D_m(x), P_n(x)$ קיים זוג יחיד של פולינום $R(x), Q(x)$ שמקיים:

$$\begin{aligned}P_n(x) &= D_m(x)\cdot Q(x)+R(x)\\ \deg R(x) &< \deg D_m(x)\end{aligned}$$

כאשר Q הוא המנה מחלוקת הפולינום P ב-D ו-R הוא השארית

6. השארית R לאחר חילוק הפולינמום P ב-$(x-a)$ שווה לערך הפולינום בנקודה $x=0$. לכן, פולינום P מתחלק ב-$(x-a)$ $\Longleftrightarrow P(a)=0$. a המאפס את הפולינום מכונה שורש.

7. כל פולינום מרוכב ניתן לפרק לביטוי מהצורה

$$P_n(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$$

8. ע"מ לחלק פולינומים, יש לבצע אלגוריתם הזהה לזה של חילוק ארוך של שלמים עם שארית.

9. אם $P(x) \in R[x]$, ו-$z \in C$ שורש של הפולינום אז גם $\bar{z}$ שורש שלו.

10.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\prod_{i=0}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

4 מטריצות

1. כפל מטריצות:

$$A = BC \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$$

2. $(AB)^t = B^tA^t$
3. מטריצה סימטרית - $A^t = A$, אנטי סימטרית: $A = -A^t$.

4.1 דירוג

- R_{ij}- החלפת שורות i, j
- $R_i(k)$ - הכפלה שורה i ב-k
- $R_{ij}(k)$ - חיסור של k פעמים j מ-i.

1. מטריצות אלמנטריות הן מטריצות יחידה שהופעלה עליהן פעולה אלמנטרית.
   (א) החלת פעולה אלמנטרית על מטריצה שקולה להכפלתה במטריצה האלמנטרית המתאימה
2. כל מטריצה שקולה בשורות (עמודות) למטריצה קנונית.

4.2 הפיכות

1. ההופכית של A יחידה.
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3. A, B הפיכות $\Leftarrow AB$ הפיכה, $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
4. $AB = CA = I \Rightarrow B = C = A^{-1}$

4.3 דמיון מטריצות

1. $A, B \in F^{n\times n}$ הן דומות אם קיימת P כך ש: $B = P^{-1}AP$.
2. שמורות תחת דמיון:
   (א) דטרמיננטה.
   (ב) עקבה.
   (ג) פולינום אופייני.
   (ד) ערכים עצמיים.
3. A, B מייצגות את אותו אופרטור בבסיסים שונים $\iff$ הן דומות.

5 משוואות לינאריות

מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} & = b_n \end{cases}$$

נקראת מערכת משוואת לינאריות בעלת n משוואות ו-m נעלמים.

5.1 שיטת גאוס

אם נשיים מערכת משוואות במטריצה מורחבת:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

אזי לאחר שנדרג אותה למטריצה מדורגת מצומצמת שורות השקולת שורות לה, תייצג המטריצה מערכת משוואות השקולה לה.

1. תהיה $A|b$ המטריצה המורחבת של מערכת. ע"י פעולות אלמנטריות נקבל מטריצה $M|c$ קנונית. נסמן את מספר השורות השונות מאפס במטריצה החדשה ב-r. m הוא מספר השורות במטריצה המקורית ו-n מספר נעלמים. אזי $m \geq r$
   (א) אם השורה האחרונה ששונה מאפס צורתה $00\ldots0a$ אין פתרון למערכת.
   (ב) הנעלמים שמתאימים לעמודות שאין להן איבר מוביל יקראו משתנים חופשיים. קיימים $n-r$ משתנים חופשיים. קביעת ערכים שרירותית של הערכים החופשיים קובעת את ערכם של שאר המתשנים.

6 מרחבים וקטוריים

6.1 מרחב וקטורי

1. מרחב וקטורי V מעל שדה F היא קבוצה המקיימת: ($v, u, w \in V, a, b \in F$)
   (א) סגירות תחת חיבור עם וקטור ומכפלה באיבר מהשדה ("סקאלר").
   (ב) $u + v = v + u$, $au = ua$
   (ג) $(u + w) + v = u + (w + v)$, $(ab)u = a(bu)$
   (ד) $a(v + u) = av + au$, $(a + b)u = au + bu$
   (ה) אדישות לכפל באיבר היחידה
   (ו) קיום וקטור האפס והוקטור הנגדי.
2. עבור $\forall\alpha \in F, v \in V$ מתקיים:
   (א) עבור $0 \in V$, $\alpha 0 = 0$
   (ב) עבור $0 \in F$, $0v = 0$
   (ג) אם $\alpha v = 0$ אזי או $\alpha = 0$ או $v = 0$.

6.2 תת מרחב

תת מרחב הוא תת קבוצה של מרחב וקטורי המקיים סגירות בתוך עצמו תחת חיבור וכפל בסקלאר.
כלומר, עבור תת מרחב $W \subseteq V$ $w_1, w_2 \in W$ מתקיים: $w_1 + aw_2 \in W$.

1. תת קבוצה של מרחב היא תת-מרחב או היא סגורה תחת חיבור וכפל בסקלאר.
2. חיתוך בין 2 תתי מרחבים הוא תת מרחב.

6.3 תלות לינארית

1. וקטורים תלויים לינארית אם קיימים $a_1,\ldots,a_n$ שלא כול אפס כך ש:

$$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n=0$$

2. וקטור v תלוי לינארית בוקטורים $u_1,\ldots,u_n$ אם קיימים $a_1,\ldots,a_n$ כך ש: $a_1u_1+\ldots+a_nu_n=v$
3. אם קבוצת וקטורים בת"ל אזי כל תת קבוצה שלה בת"ל.
4. נאמר שקבוצת וקטורים $u_1\ldots u_n$ פורשת את ת"מ W אם עבור כל $w\in W$ קיימים $a_1,\ldots,a_n$ כך ש:

$$a_1u_1+\ldots+a_nu_n=w$$

5. במטריצה מדורגת, השורות הן בת"ל. מרחב השורות אינו משתנה בדירוג שורות.

6.4 בסיס ומימד

1. קבוצת וקטורים S היא בסיס של ת"מ W אם (1) S בת"ל (2) $V=\text{span}S$
2. אם הוקטורים $v_1,\ldots v_n$ פורשים את V וקבוצת הוקטורים $w_1,\ldots,w_m$ בת"ל אז $m\le n$.
3. בכך הבסיסים של ת"מ יש אותו מספר וקטורים, הוא מימד תת המרחב.
4. כל קבוצת וקטורים בת"ל ב-V היא או בסיס או שהיא ניתנת להשלמה לבסיס.
5. אם V סוף מימדי, נניח $\dim V=n$
   (א) בכל קבוצה פורשת יש לפחות n וקטורים ובכל קבוצה בת"ל יש לכל היותר n וקטורים.
   (ב) קבוצה היא בסיס $\iff$ היא בת"ל מקסימלית
   (ג) קבוצה היא בסיס $\iff$ היא פורשת מינימלית.

6.5 סכום מרחבים

1. סכום של תת מרחבים הוא מרחב.
2. $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
3. מרחב וקטורי הוא סכום ישר של שני תתי מרחבים אם כל וקטור בו ניתן להציג בצורה יחידה ע"י סכום של וקטור מכל תת מרחב
4. מרחב וקטורי V הוא סכום ישר של שני תתי מרחבים U,W $\iff$ $U\cap W=\{0\}$, $V=U+W$
5. אם W_1,W_2 תת מרחבים של V, S_1,S_2 בסיסים של W_1,W_2 בהתאמה
   (א) אם $V=W_1\oplus W_2$ אזי $S_1\cup S_2$ בסיס של V.
   (ב) אם S_1,S_2 בת"ל ו-$S_1\cup S_2$ בסיס של V אזי $V=W_1\oplus W_2$.
6. אם $V=W\oplus W$ אזי $\dim V=\dim U+\dim W$.
7. לכל תת מרחב W של מרחב V קיים משלים ב-V.

6.6 וקטור קואורדינטות

יהיה $e=\{e_1,\ldots,e_n\}$ בסיס במרחב וקטורי V מעל שדה F, כל וקטור $v\in V$ ניתן לרשום באופן יחיד

$$v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_nv_n$$

הוקטור $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ מכונה וקטור הקואורדינטות של v בבסיס e, ומ-סומן ב-$[v]_e$.

1. אם $u,v\in V$ ו-e בסיס ב-V אזי $(u+v)_e=u_e+v_e$, $(\alpha u)_e=\alpha u_e$.
2. תהיה העתקה φ איזומורפיזם מ-V ל-W. $v_1,v_2,\ldots,v_n$ תלויה לינארית $\iff$ $\varphi(v_1),\varphi(v_2),\ldots,\varphi(v_n)$ תלויה לינארית.
3. אם מרחבים V,W איזומופריים אזי $\dim V=\dim W$
4. כל מרחב וקטורי n מימדי איזומופרי ל-F^n.
5. יהיו f,e בסיסים של V, מתקיים:

$$\begin{aligned}f_1&=a_{11}e_1+a_{12}e_2+\ldots+a_{1n}e_n\\ f_2&=a_{21}e_1+a_{22}e_2+\ldots+a_{2n}e_n\\ \vdots&\qquad\vdots\\ f_n&=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\ldots+a_{nn}e_n\end{aligned}$$

אזי קיימת מטריצה $P_e^f=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\ldots&a_{n1}\\ a_{12}&a_{22}&\ldots&a_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$ מכונה "מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס f" ומתקיים עבור כל $v\in V$: $P_e^f\,[v]_f=[v]_e$.

7 טרנספורמציות לינאריות

1. $f:X\to Y$ חד חד ערכית אם $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. העתקת על - $\text{Im}f=Y$
2. העתקה לינארית מקיימת $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$, $f(\alpha v_1)=\alpha f(v_1)$
3. V,I מרחבים וקטורים. $e=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ב-V. $u_1,\ldots,u_n$ וקטורים ב-U. אזי קיימת העתקה לינארית יחידה T כך ש-$T(v_i)=u_i, i=1,\ldots,n$.
4. אם $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס ב-V אזי $\text{Im}T$ נפרש על ידי $\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$.
5. T חח"ע $\iff$ לכל $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בת"ל אזי $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל.
6. העתקה לא סינגולרית - אם $\ker T=\{0\}$.

7.1 גרעין וטווח

1. $\ker T=\{v\in V:T(v)=0\}$.
2. $T:V\to U$, אזי (1) $\text{Im}T$ ת"מ ב-U (2) $\ker T$ ת"מ ב-V.
3. $\dim V=\dim\ker T+\dim\text{Im}T$.
4. $\text{rank}T=\text{rankIm}T$.
5. העתקה לא סינגולרית אם $\ker T=\{0\}$.
6. $f:X\to Y$ הפיכה אם קיימת $g:Y\to X$ כך ש: $g(f(x))=I$, $f(g(y))=I$.

7.2 מטריצות מייצגות

1. המטריצה המייצגת של $T:V\to U$ לפי הבסיס $v_1,\dots,v_n$ של V ו-$u_1,\dots,u_n$ של U היא:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}u_1+\ldots+a_{n1}u_n \\ \vdots &\quad \vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}u_n+\ldots+a_{nn}u_n \end{aligned}$$

מורכבת ממקדמי הוקטורים מסודרים בעמודות מטריצה:

$$[T]_v^u=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

אם ההעתקה היא $T:V\to V$ אזי נהוג לכתוב $[T]_v^v=[T]_v$.

2. יהיה $T:V\to V$, $v=\{v_i\}_{i=1}^n$ בסיס ל-V. אזי לכל $u\in V$ מתקיים: $[T]_v[u]_v=[Tu]_v$
3. $T:V\to U$, לכל $v\in V$ מ תקיים $[T]_v^u x_v=[Tx]_u$
4. תהיה P מטריצת מעבר בסיס e לבסיס f אזי $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$.
5. יהיו V,U,W מרחבים מעל F, $v=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V, $u=\{u_1,\dots,u_m\}$ בסיס ל-U ו-$w=\{w_1,\dots,w_p\}$ בסיס ל-W. אם $T:V\to U, S:U\to W$ אזי $[ST]_v^w=[S]_u^w[T]_v^u$.

8 דטרמיננטות

$$\begin{aligned} \det A_{2\times 2} &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ I &\in [0,n] \\ \det A_{n\times n} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,|M_{ij}|=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,|M_{ji}| \end{aligned}$$

כאשר M_{ji} היא המטריצה הנוצרת ממחיקת השורה ה-j והעמודה ה-i של המטריצה

1. אם כל האיברים בשורה (עמודה) של מטריצה שווים לאפס - הדטרמיננט שווה לאפס.
2. דטרמיננט של מטריצה משולשת שווה למכפלת אברי האלכסון
3. עבור שתי מטריצות השונות זו מזו אך בשורה אחת, מתקיים:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \ldots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

4. אם מטריצה B מתקבלת מהכפלת שורה של מטריצה A בסקלאר k אזי $|B|=k\,|A|$. אם B מתקבל על ידי הכפלת A ב-k ($B=kA$) אזי $|B|=k^n\,|A|$
5. אם מטריצה B מתקבלת מחלפת שורות של A, אזי $|B|=-|A|$
6. דטרמיננט הוא אינווריאנט של:
   (א) הוספת שורה לשורה אחרת.
   (ב) שיחלוף
   (ג) פיתוח עבור כל שורה/עמודה.
7. $|AB|=|A|\,|B|$
8. $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$
9. אם A היא מטריצת ריבועים משלושת אזי הדטרמיננט שלה הוא מכפלת הדטרמיננטים של התאים באלכסון.

8.1 הצמוד הקלאסי

$$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}$$ כאשר $A_{i,j}=|M_{ij}|\,(-1)^{i+j}$

1. $A(\operatorname{adj}A)=(\operatorname{adj}A)A=|A|\,I$
2. אם A הפיכה, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$
3. כלל קרמר: למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם $|A|\neq 0$ והפתרון הוא

$$x_i=\frac{D_i}{|A|}, i=1,2,\ldots n$$

כאשר D_i היא המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה ה-i של A ב-b.

9 ערכים עצמיים

9.1 ערכים עצמיים

1. על מנת למצוא מטריצה אלכסונית הדומה למטריצה, יש למצוא תחילה את הערכים העצמיים שלה, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ולסדר אותם באלכסון מטריצה.
2. אם λ ערך עצמי אזי קיים $v\in V$ כך ש: $Av=\lambda v$. v נקרא וקטור עצמי.
3. על מנת למצוא את הערכים העצמיים, יש לבצע $|\lambda I-A|$, ולמצוא את שורשי הפולינום שהתקבל (הפולינום האופייני).
4. הוקטורים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים הם עמודות המטריצה המלכסנת P כך ש- $P^{-1}AP=D$.

   כלומר, אם v_i הוא הערך העצמי המתאים לוקטור העצמי λ_i, אזי $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots\lambda_i,\ldots)$ והמטריצה P היא המטריצה שעמודותיה $v_1,\dots,v_i,\dots$.

   ממקמים λ_i, v_i לפי הריבוי הגיאומטרי.

9.2 וקטורים עצמיים

1. וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.
2. ע"מ לחשב וקטור עצמי, פותרים את המשוואה $(\lambda_i I-A)x=0$. הגרעין של משוואה זו הוא המרחב העצמי של λ_i והמימד של הגרעין הוא הריבוי הגיאומטרי.
3. אם סכום איביר השורות (עמודות) של מטריצה הינו מספר קבוע, k, אזי k הוא ערך עצמי לו מתאים הוקטור העצמי $(1,\dots,1)$.
4. לאופורטור $T:V\to V$ יש מטריצה מייצג אלכסונית $\iff$ קיים בסיס ל-V שמורכב מוקטורים עצמיים של $[T]$. אזי עבור הבסיס הנ"ל, המטריצה $[T]$ תהיה אלכסונית.

9.3 ריבובים

1. ריבוי אלגברי של λ_i - החזקה של $(\lambda-\lambda_i)$ בפולינום האופייני.
2. ריבוי גיאומטרי- המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים ל-λ_i.
3. לכל ערך עצמי - הריבוי הגיאומטרי גדול או שווה לריבוי האל-גברי שגדול או שווה לאחד.
4. A לכסינה,
   (א) $\iff$ עבור כל ערך עצמי, הריבוי הגיאומטרי שווה לאל-גברי.
   (ב) $\iff$ ל-$A_{n\times n}$ יש n וקטורים עצמיים בת"ל.
5. אם ל-$A_{n\times n}$ יש n ע"ע שונים אזי n לכסינה.
6. $\mathrm{trace}A=\sum\lambda_i$, $|A|=\prod\lambda_i$. בנוחאות אלו, λ_i נספר לפי הריבוי האלגברי שלו.
7. סכום הריבויים האלגבריים שווה למימד המטריצה.

9.4 פולינומים מאפסים

1. עבור פולינום אופייני של A $f_A(\lambda)$, מתקיים $f_A(A)=0$. (משפט קיילי המילטון).
2. אם יש הפיכה, אז יש פולינום כך ש-$g(A)=A^{-1}$, ודרגתו-$n-1$.
3. מטריצה היא נילפוטנטית אם יש m כך ש-$A^m=0$.
4. מטריצה היא נילפוטנטית $\iff$ הערך העצמי היחיד שלה הוא 0. אזי $A^n=0$.

9.5 תכונות נוספות

1. 0 וקטור עצמי של A $\iff$ A לא הפיכה.
2. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A המתאים לוקטור העצמי v אזי λ^{-1} הוא ע"ע ל-A^{-1} עם הוקטור העצמי v.
3. עם λ ע"ע מרוכב עם ו"ע v ו-A ממשית אזי $\bar{\lambda},\bar{v}$ הם גם ע"ע/ו"ע.
4. עבור פולינום $f(x)$, A מטריצה ו-λ,v ע"ע ו-ו"ע המתאימים לה. אם $B=f(A)$, אזי $f(\lambda)$ הוא ע"ע מתאים עם ו"ע v.
5. הערכים העצמיים של מטריצה משולשת אם אברי האלכסון שלה.

10 הערות

אינני ערב לנכונות התוכן.

אם יש לכם תיקונים, בבקשה שילחו לי ל-ronen@tx.technion.ac.il.

גרסא מעודכנת, במידה ותהיה, תמצא ב-www.technion.ac.il/~ronen.