דף סיכום אלגברה לינארית

מרחבי עמודות, שורות, אפס:

כל פתרון של המערכת $A\underline{x}=\underline{b}$: $\underline{x} = x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k$

נתונה מטריצה mxn:

$span\{r_1, r_2, ...r_m\}$ = **מרחב השורות** של המטריצה.

$span\{c_1, c_2, ...c_n\}$ = **מרחב העמודות** של המטריצה.

$nullity(A)$ = **מרחב הפתרונות** = **מרחב האפס** = המרחב הנפרש ע"י כל הפתרונות של $Ax=0$.

אם $Ax=b$ מערכת לינארית ב-m משוואות עם n משתנים אז:

I. משפט: $A\underline{x}=\underline{b}$ קונסיסטנטית $\Leftrightarrow$ $\underline{b}$ נמצאת במרחב העמודות של A.

II. משפט: $A\underline{x}=\underline{b}$ קונסיסטנטית $\Leftrightarrow$ $rank(A)=rank(A|\underline{b})$ (עמודות A כפול וקטור $\underline{b}$).

שאלה: הראה ש-b נמצאת במרחב העמודות של A והבע את b כצרוף לינארי של מרחב עמודות A:

1) בצע דירוג גאוס ופתור את המשוואות. קיבלנו ערכים של $x_1...x_n$.

2) בדוק אם המערכת קונסיסטנטית. (על פי I).

3) הצב את הערכים ב: $x_1[\mathbf{c}_1] + x_2[\mathbf{c}_2] + ... + x_n[\mathbf{c}_n]$. תקבל את $\underline{b}$.

4) הראנו $\underline{b}$ שנמצא במרחב העמודות (כי הוא צרוף לינארי).

משפט: אם x_0 **פתרון פרטי** של המערכת $Ax=b$ ואם $\{v_1, v_2, ...v_k\}$ בסיס למרחב האפס של A, (כלומר מרחב הפתרונות של $Ax=0$), אז: **הפתרון הכללי** של $Ax=b$ יהיה: $x = x_0 + c_1v_1 + c_2v + ... + c_kv_k$.

כמו כן, לכל בחירה של $c_1, c_2, ...c_k$, הוקטור x יהיה פתרון של $Ax=b$.

(במילים אחרות: [פתרון כללי של $Ax=b$]= [פתרון פרטי של $Ax=b$]+ [פתרון כללי של $Ax=0$]).

דוגמא למציאת הפתרון הכללי של $Ax=b$:

דרגנו את המטריצה יחד עם הפתרון b.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו:
$$\begin{aligned} x_1 &= -2r - 4s + 2 \\ x_2 &= r \\ x_3 &= -2s + 1 \\ x_4 &= s \end{aligned}$$
ומכאן
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{פתרון פרטי}} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

איך מוצאים בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית $Ax=0$:

1. מדרגים את מטריצת המקדמים. (מוצאים איברים פותחים).
2. מוצאים איברים חופשיים.
3. נציב 1 באחד המשתנים החופשיים, ו-0 בשאר.ונעבור על כל האפשרויות.
4. לכל הצבה מקבלים וקטור שפורס את המרחב, ביחד בסיס שפורש את המרחב.

במטריצה מדורגת: השורות עם האיברים הפותחים הן השורות שמהוות בסיס למרחב השורות. העמודות המקוריות של המטריצה בהן לאחר הדרוג מופיע איבר פותח מהוות את הבסיס למרחב העמודות.

<u>משפטים:</u>

- לכל מטריצה A מימד מרחב השורות = מימד מרחב העמודות: $dim(r\ space)=dim(c\ space)$.
- דרגת המטריצה = מימד מרחב השורות/עמודות = $rank(A)$.
- מימד מרחב הפתרון/האפס = $nullity(A)$.
- לכל A אז: $rank(A) = rank(A^t)$.
- אם A מטריצה עם n עמודות אז: $rank(A)+nullity(A)=n$.
- אם A מטריצה mxn אז:
  - $Rank(A)$ = מספר האברים הפותחים בפתרון של $Ax=0$.
  - $Nullity(A)$ = מספר האיברים החופשיים בפתרון של $Ax=0$.
- למטריצות A ו-B שקולות שורות יש אותו מרחב השורות.
  - עמודות A בת"ל אם ורק אם עמודות B בת"ל.
- אם $Ax=b$ היא מערכת של m משוואות ב-n משתנים אז:
  - $Ax=b$ קונסיסטנטית.
  - הוקטור b נמצא במרחב העמודות של A.
  - מטריצת המקדמים של A ומטריצת $[A|b]$ בעלות אותה דרגה. $Rank(A)=rank(A|b)$.

השלמת בסיס למטריצה – הוספת מטריצת היחידה ודירוג. הוקטורים עם האיברים הפותחים במטריצת היחידה נם המשלימים של הבסיס.

טרנספורמציות לינאריות:

הגדרה:

אם $T:V\rightarrow W$ פונקציה ממרחב V למרחב W, אז T נקראת טרנפורמציה לינארית אם לכל וקטורים u,v ב-V ולכל סקלר c,d מתקיים: $T(c\underline{u}+d\underline{v})=cT(\underline{u})+dT(\underline{v})$.

הגדרה:

אם $A_{m\times n}$ אז טרנספורמציה $T:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^m$ המוגדרת ע"י $T(x)=A(x)$ היא טרנס' לינארית.

דוגמאות:

טרנס' סיבוב - $T(\underline{x})=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\underline{x}$ כאשר θ היא זוית הסיבוב.

טרנס' האפס - $T:V\rightarrow W$ המקיימת $T(\underline{v})=\underline{0}$ לכל $\underline{v}\in V$.

טרנס' זהות - $I:V\rightarrow V$ המקיימת $I(\underline{v})=\underline{v}$ לכל $\underline{v}\in V$.

טרנס' מתיחה/כיווץ - $T:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ המקיימת $T(k\underline{x})=k\underline{x}$ לכל $\underline{x}\in\mathbf{R}^n$. כיווץ כאשר $k<1$, מתיחה $k>1$.

טרנס' שיקוף על מישור xy - $T:\mathbf{R}^3\rightarrow\mathbf{R}^3$ המקיימת $T(x,y,z)=(x,y,0)$ לכל $x,y,z\in\mathbf{R}$. והמטריצה המתאימה לה היא : $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. (באותה מידה ישנה טרנס' שיקוף על מישור xz, yz במימד 3)...

הגדרה:

אם $T:U\rightarrow V, S:V\rightarrow W$ טרנס' לינאריות אז: $S\circ T(\underline{u})=S(T(\underline{u}))$ טרנס' לינארית.

משפט:

$T:V\rightarrow W$ טרנס' לינארית אז:

1) $T(\underline{0}_V)=\underline{0}_W$.

2) $T(-\underline{v})=-T(\underline{v})$ לכל $\underline{v}\in V$.

3) $T(\underline{v}-\underline{w})=T(\underline{v})-T(\underline{w})$ לכל $\underline{v},\underline{w}\in V$.

הגדרה:

נניח ש: $T:V\rightarrow W$ טרנס' לינארית אז נגדיר:

א) הגרעין של T: $\ker T=\{\underline{v}\in V\mid T(\underline{v})=\underline{0}\}$. כל וקטורי $\underline{v}$ שכאשר מפעילים עליהם T הופכים ל-$\underline{0}$.

ב) התמונה של T: $\operatorname{Im}T=\{T\underline{v}\mid \underline{v}\in V\}$. כל תוצאות הטרנס' T שמתקבלים שמפעילים על $\underline{v}$ במרחב V.

משפט:

נניח ש: $T:V\rightarrow W$ טרנס' לינארית אז:

א) $\mathbf{ker}T$ הוא תת מרחב של V.

ב) $\mathbf{Im}T$ הוא תת מרחב של W.

הגדרה:

כאשר $T\underline{x}=A\underline{x}$ טרנס' לינארית אז:

א) $\mathbf{ker}T$=[מרחב האפס של A].

ב) $\mathbf{Im}T$=[מרחב העמודות של A].

משפט המימד לטרנס' לינארית:

אם $T:V\rightarrow W$ טרנס' לינארית ו: $dimV=n$ אז: $dim(ker(T))+dim(Im(T))=n$.

הערה: כאשר T מוגדרת בעזרת מטריצה, $T\underline{x}=A\underline{x}$ מקבלים את משפט המימד למטריצה.

<u>משפט:</u>

אם $T : V \to W$ טרנס' לינארית:

א) אם T על $\Leftrightarrow$ $ImT=W$.

ב) אם T חח"ע $\Leftrightarrow$ $kerT=\{\underline{0}\}$.

נגזר מכאן: $T : V \to V$ ו-V בעל מימד סופי אז: T חח"ע $\Leftrightarrow$ $kerT=\{\underline{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $ImT=V$ $\Leftrightarrow$ T על.

אם $T : V \to W$ ו-T חח"ע ועל, קיימת טרנס' לינארית הפיכה ל-T והיא תסומן ב: $T^{-1} : W \to V$

באותו הקשר אם T מוגרת ע"י $Tx = Ax$ ו-T חח"ע ועל אז קיימת $T^{-1}x = A^{-1}x$.

מסמנים $[T] = A$ - המטריצה שמתאימה לטרנס' T.

מסמנים $[T^{-1}] = A^{-1}$ - המטריצה שמתאימה לטרנס' ההפיכה ל-T.

אפשר להראות שכל טרנס' לינארית $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ היא מהצורה $T\underline{x}=A\underline{x}$.

<u>שיטה למציאת הטרנס' הלינארית מבסיס נתון ומספר דגימות של הטרנס':</u>

נתונה טרנס' $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ כאשר $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbf{R}^3$ בסיס. (אם לא בסיס אז נמצא את הבסיס של התחום).

נתונים: Tv_1, Tv_2, Tv_3 (v מוקטורי הבסיס שקיבלנו)

א) ודא שיש בסיס לתחום, והוא שלם – אם לא השלם אותו.

ב) הצב בהתאם למימדים. לדוגמא: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ כלומר

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ג) נהפוך את המטריצה שמכילה את וקטורי הבסיס ונמצא את הערכים: α, β, γ.

ד) עכשיו נציב ב: $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) + \gamma T(v_3)$ כאשר ה-$T(v)$ נתונים וה-

α, β, γ הם אלו שמצאנו קודם.

ה) מצאנו את הטרנספורמציה. אפשר לרשום אותה עם אותיות או רק מקדמים.

<u>משפט:</u>

אם $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ היא טרנס' לינארית ואם $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^n$ אז: $T\underline{x}=A\underline{x}$ כאשר

A היא המטריצה שעמודותיה הן: $Te_1, Te_2, ..., Te_n$.

נסמן: $[T] = A$, ו- $T\underline{x} = [T]\underline{x}$. במילים $[T]$ היא המטריצה המתאימה לטרנס' T.

<u>שיטה להעברת בסיסים:</u>

נתון: טרנספורמציה, בסיס B ובסיס B'. (חייבים להיות בסיסים שלמים אם חסר אז משלימים).

נניח מבקשים למצוא את $[T]_B^{B'}$ - המטריצה שמעבירה מבסיס B לבסיס B':

א) ניקח את וקטורי הבסיס B ונפעיל עליהם את הטרנספורמציה. קבלנו את כל ה- Tb_i.

ב) ניקח את וקטורי הבסיס B ונכניס אותם למטריצה.

ג) נהפוך את המטריצה.

ד) נציב לכל ה- Tb_i בנוסחא: $Tb_i = \alpha b'_1+\beta b'_2+\gamma b'_3$ ונמצא את ערכי α,β,γ. (b' הם וקטורי הבסיס של B').

ה) הערכים האלו בוקטור $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ מהווים את $[Tb_i]_{B'}$.

ו) נציב את כל הוקטורים שקיבלנו במטריצה וקיבלנו: $[T]_B^{B'} = [[Tb_1]_{B'} | \dots | [Tb_n]_{B'}]$.

<u>מטריצות המעבר מבסיס B לבסיס B':</u>

נגדיר B – בסיס ישן, B' – בסיס חדש. ונסמן אותה $[I]_B^{B'}$.

מטריצות המעבר מ-B ל-B' ומטריצת המעבר מ-B' ל-B הפוכות זו לזו. $[I]_B^{B'} = [I]_{B'}^{B^{-1}}$.

כאשר P היא מטריצת המעבר מבסיס B' לבסיס B אז לכל $v \in V$ מתקיים: $[V]_{B'} = P^{-1}[V]_B$ וגם $[V]_B = P[V]_{B'}$

<u>משפט:</u>

אם $T: V \to V$ טרנס' לינארית ו-V במימד סופי, B ו-B' בסיסים של V, אז: $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ כאשר P היא מטריצת המעבר מ-B' ל-B.

<u>הגדרה:</u>

אם A ו-B מטריצות ריבועיות מאותו סדר nxn אומרים ש:<u>B דומה ל-A</u> אם קיימת P הפיכה כך ש: $B = P^{-1}AP$. (לזכור ע"י $AP=PB$).

למטריצות דומות יש: אותה *det(A)*, אותה *rank(A)*, אותה *nullity(A)* , ואותה *trace(A)* – סכום אברי אלכסון ראשי.

<u>גיאומטריה של טרנס' לינאריות:</u>

טרנס' סיבוב בזוית θ בכיוון השעון: $[A] = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

טרנס' שיקוף ביחס לישר l בזוית θ לציר X: $[A] = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$.

<u>מקרים פרטיים:</u>

l – ציר Y ($x=0$): $[A] = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

l – ציר X ($y=0$): $[A] = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

l – 45 מעלות ($x=y$): $[A] = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ הפעולה האלמנטרית : $R_1 \leftrightarrow R_2$

<u>טרנס' התארכות/התכווצות בכיוון אחד הצירים:</u>

קבוע $K>1$ התארכות, קבוע $0<K<1$ התכווצות.

התארכות התכווצות בכיוון ציר X: $[A] = \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ הפעולה האלמנטרית : $R_1 \to kR_1$

התארכות התכווצות בכיוון ציר Y: $[A] = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$ הפעולה האלמנטרית : $R_2 \to kR_2$

<u>טרנס' גזירה בכיוון ציר X/ציר Y:</u>

גזירה בכיוון ציר X: $[A] = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ הפעולה האלמנטרית : $R_1 \to R_1 + kR_2$

גזירה בכיוון ציר Y: $[A]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$ הפעולה האלמנטרית : $R_2 \to R_2 + kR_1$

משפט:
אם $T\underline{x}=A\underline{x}$ (A מטריצה $2x2$):
אם A הפיכה $\Leftrightarrow$ T היא הרכבה של סדרת גזירות, התארכויות/התכווצויות, ושיקופים.

למצוא כזו: מדרגים עד שמגיעים למטריצת היחידה. מפעילים הפוך את פעולות הדירוג על מטריצת יחידה. סדר הפעולות הוא מהסוף להתחלה.
משפט:

אם $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ $T\underline{x}=A\underline{x}$ ו-A הפיכה אז:
א) כל ישר עובר לישר.
ב) התמונה של ישר דרך הראשית היא ישר דרך הראשית.
ג) התמונה של ישר מקביל הוא ישר מקביל.
ד) התמונה של קטע ישר שקצותיו הם הנקודות P ו-Q, הוא קטע ישר שקצותיו הם $T(P)$ ו-$T(Q)$.
ה) הנקודות R,Q,P מונחות על ישר אחד $\Leftrightarrow$ תמונותיהם מונחות על ישר אחד.

מסקנה: כפל המטריצה הפיכה מעביר משולשים למשולשים, ומקביליות למקביליות.

שיטה להפעלת מטריצה על נקודות / מציאת ישרים וכו':
נתונה טרנס', ונקודות. (או משוואה של ישר ממנו ניקח נקודות).
א) מפעילים את הטרנס' על הנקודות.
ב) מכניסים למשוואת הישר $y=ax+b$.
ג) מחלצים.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים:

מילון:
ערך עצמי – ע"ע – סקלר (מספר) שאם כופלים בו וקטור אז לטרנס' מסויימת: $Ax=\lambda x$.
וקטור עצמי – ו"ע – וקטור שמקיים את המשוואה עבור טרנס' (מטריצה מסויימת).
משוואה אופיינית – נוצר ע"י $\det(A-\lambda I)=0$. הערכים המקיימים את המשוואה הם הע"ע של המטריצה.
פולינום אופייני – $\det(A-\lambda I)$.
בסיס למרחב עצמי המתאים ל- λ - לכל ע"ע יש בסיס למרחב שהוקטורים העצמיים המתאימים לע"ע פורשים.

באופן כללי:
אם $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנס' לינארית ויש בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ כך ש: $Tv_1=\lambda_2 v_1, Tv_2=\lambda_2 v_2$ אז:
$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ אלכסונית.

במילים: כדי להציג טרנס' לינארית $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $Tx=Ax$ בעזרת מטריצה אלכסונית צריך למצוא בסיס של התחום שמורכב מוקטורים שמקיימים את המשוואה $Tx=Ax=\lambda x$.

טיפ: למטריצות אלכסוניות, משולשיות תחתונות ועליונות, אברי האלכסון הם הע"ע של המטריצה.

משפט:
כאשר λ ע"ע של A ו-$\underline{x}$ ו"ע מתאים ל- λ אז: λ^k הוא ע"ע של A^k עם אותו $\underline{x}$. ($k \ge 1$).

אם B הוא בסיס המורכב מו"ע של המטריצה A המשמשת בטרנס' לינארית אז: $[T]_B=D,[T]_E=A$.

A ו-D דומות כלומר קיים P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=D$ ו-P היא מטריצת המעבר בין B ל-E. העמודות של P הם הוקטורים של הבסיס B כלומר הם הו"ע של המטריצה A.

הגדרה:

אומרים שמטריצה ריבועית A <u>ניתנת לליכסון</u> אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש: $P^{-1}AP$ היא אלכסונית. אם קיימת כזו P אז אומרים ש-P <u>מלכסנת</u> את A. במילים אחרות: אם A דומה למטריצה אלכסונית אז A ניתנת לליכסון.

<u>משפט מרכזי</u>:
A ניתנת לליכסון $\Leftrightarrow$ יש ל-A n וקטורים עצמיים בת"ל.

אם הו"ע הם עמודות של מטריצה P אז $P^{-1}AP$ אלכסונית כאשר איברי האלכסון הם הע"ע של המטריצה A. (ו"ע שמתאימים לע"ע שונים הם בת"ל). המטריצה D.

משפט:
למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני ולכן יש להן אותם ו"ע.

הוכחה: נניח A ו-B דומות אז: $B = P^{-1}AP$, ומכאן
$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$
אבל $A - \lambda I, B - \lambda I$ דומות ולכן $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$.

מרחבי מכפלה פנימית:

מכפלה סקלרית =אוקלידית: $(u \bullet v) = (u,v) = u_1v_1 + ... + u_nv_n$.

נורמה (אורך של u): $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$.

מרחק בין u ל-v: $d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + ... + (u_n = v_n)^2}$

תכונות של מכפלה פנימית - הגדרות:

א) סימטריות: $(u,v) = (v,u)$.

ב) אדטיביות: $(u + v, w) = (u,w) + (v,w)$.

ג) הומוגניות: $(ku,v) = k(u,v)$.

ד) חיוביות: $(u,u) \geq 0, u = 0 \Leftrightarrow (u,u) = 0$.

ה) בנוסף מתקיים גם:
$$(u - v, w) = (u,w) - (u,w), (u, v - w) = (u,v) - (u,w)$$

הגדרות מרחבי מכפלה פנימית:
ניתן להגדיר מרחב כאשר המכפלה הפנימית נתונה.

א) המכפלה הפנימית הפשוטה.

ב) מכפלה מוגדרת בנתוני השאלה. דוגמאות: מכפלה עם משקלים.

ג) מכפלה עם מטריצה ריבועית קבועה. כלומר: $(u,v) = Au \bullet Av, A_{n\times n}$. לדוגמא עם המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ המכפלה הנוצרת היא:
$(u,v) = Au \bullet Av = (u_1 + 2u_2)(v_1 + 2v_2) + u_2v_2$. אפשר לרשום גם:
$$(u,v) = Au \bullet Av = (Av)^t Au = v^t A^t Au.$$

ד) במרחב המטריצות ניתן להגדיר מכפלה פנימית:
$$(u,v) = u_1v_1 + ... + u_nv_n, u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 & \\ & v_4 \end{pmatrix}.$$

ה) אפשר גם ע"י: $(u,v) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

ו) בכל מקרה בו הוגדרה מכפלה פנימית שעומדת בקריטריונים ניתן להגדיר גם נורמה ומרחק.

אי שיוויון קושי-שוורץ:
אי שיוויון קושי-שוורץ: $(u,v) \leq \|u\|\|v\| = [\sqrt{(u,u)}][\sqrt{(v,v)}]$.

תכונות הנורמה:
לנורמה יש את התכונות הבאות:

א) $\|u\| \geq 0$

ב) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ג) $\|ku\| = |k|\|u\|$

ד) $\|u+v\| \le \|u\| + \|u\|$ - אי שיוויון המשולש. מוביל למשפט פיתגורס.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|u\|^2$$

במרחב שני וקטורים ניצבים אחד לשני אם $(u,v)=0$. אומרים שהם אורתוגונליים.

<u>הגדרה:</u>
אם בקבוצה וקטורים כל שני וקטורים **אורתוגונליים** זה לזה אומרים **שהקבוצה אורתוגונלית.**
אם בקבוצה וקטורים אורתוגונליים כל הוקטורים הם בעלי אורך 1 אומרים שוקטורים הם **אורתונורמליים והקבוצה אורתונורמלית.**

*בסיס אורתונורמלי / אורתוגונלי של מרחב הוא למעשה מערכת הצירים של המרחב על בסיס המרחב עצמו.

<u>משפט:</u>
אם $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס **אורתונורמלי** למרחב V אז לכל וקטור v במרחב V מתקיים:

$$v=(v,v_1)v_1+(v,v_2)v_2+...+(v,v_n)v_n=\sum_{k=1}^{n}(v,v_k)v_k.$$

ואם: $[u]_B=(\alpha_1,...,\alpha_n) \Rightarrow \|u\|=\sqrt{\alpha_1^2+...+\alpha_n^2}$. המקדמים של הצגת u לפי בסיס B. וגם $[u]$ הוא וקטור יחידה. אם v,u אורתוגונליים זה לזה אז גם $[u],[v]$ אורתוגונליים זה לזה.

אם $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס **אורתוגונלי** למרחב V אז לכל וקטור v במרחב V מתקיים:

$$v=\frac{(v,v_1)}{\|v_1\|^2}v_1+\frac{(v,v_2)}{\|v_2\|^2}v_2+...+\frac{(v,v_n)}{\|v_n\|^2}v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(v,v_k)}{\|v_k\|^2}v_k$$

<u>איך מוצאים בסיס אורתוגונלי:</u>
נתונה קבוצה. $U=\{u_1,...,u_n\}$

א) נבדוק שהיא בת"ל. אם לא נדרג ונמצא בסיס לקבוצה שיהיה בת"ל.
ב) לפני תהליך גרם-שמידט נבדוק לכל זוג מכפלה פנימית – אם=0 אז כבר אורתוגונליים.
ג) נגדיר: $v_1=u_1$. נסמן $W=span\{v_1\}$, ונחשב

$$v_2=u_2-proj_W u_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1.$$

ד) נמשיך ונגדיר: $W=span\{v_1,v_2\}$, ונחשב $v_3=u_3-\frac{(u_3,v_1)}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{(u_3,v_2)}{\|v_2\|^2}v_2$.
ה) וכן הלאה עד סוף הקבוצה. זה נקרא תהליך גרם-שמידט. (הוא מייצר בסיס **אורתוגונלי** בלבד).

<u>מטריצות אורתוגונליות:</u>

<u>הגדרה:</u>
אם מטריצה ריבועית P מקיימת את: $P^{-1}=P^t$ אז היא נקראת מטריצה אורתוגונלית.

אם נתונה A ריבועית nxn אז התכונות הבאות מתקיימות:
א) A ריבועית היא **אורתוגונלית.**
ב) אז העמודות של A **אורתוגונליות.**
ג) אז השורות של A **אורתונורמליות.**

הדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא: $P^tP=I \Rightarrow |P^tP|=1 \Rightarrow |P^t||P|=1 \Rightarrow |P|^2=1 \Rightarrow P=\pm1$.
אם $det(P)=1$ אז מדובר בסיבוב מערכת הצירים.
אם $det(P)=-1$ אז מדובר בשיקוף ואחר כך סיבוב של מערכת הצירים.

כפל של וקטור במטריצה אורתוגונלית אינו משנה את אורכו. $\|Px\|^2 = PxPx = (Px)^t Px = x^t P^t Px = x^2$.

ליכסון אורתוגונלי:

A ניתנת לליכסון אורתוגונלי, אם קיימת מטריצה מלכסנת P כך ש-P היא מטריצה אורתוגונלית. ו- $P^t AP$ אלכסונית.
נגזר מכך ש-A סימטרית.

מציאת מלכסנת אורתוגונלית:

א) מוצאים בסיס לכל מרחב עצמי של A.
ב) בעזרת גרם-שמידט הופכים לבסיס אורתוגונלי.
ג) מנרמלים לבסיס אורתונורמלי.
ד) P היא המטריצה שעמודותיה התקבלו בשלב ג.

משפט:

אם A ריבועית, אז אם:

א) A ניתנת לליכסון אורתוגונלי.
ב) A סימטרית.
ג) ל-A יש n וקטורים עצמיים אורתונורמליים.

אם A סימטרית אז ו"ע שמתאימים לע"ע שונים הם אורתוגונליים.

הקירוב הטוב ביותר:

משפט הקירוב הטוב ביותר:

נניח ש-V מרחב מכפלה פנימית. W תת מרחב במימד סופי, u וקטור ב-V. $proj_W u$ הוא הקירוב הטוב ביותר ל-u ב-W.

כלומר לכל w ב-W ששונה מ- $proj_W u$ מתקיים: $\|proj_W u\| < \|u - w\|$.

במילים: הוקטור שהכי קרוב ל-u בתת המרחב W הוא ההיטל של u על תת המרחב W.

יישום:

מחפשים מבין כל ה-Ax האפשריים את הקרוב ביותר ל-b. לכל x, Ax הוא במרחב העמודות של A, ואוסף כל ה-Ax-ים הוא מרחב העמודות של A. כלומר קיים Ax^* שהוא הכי קרוב ל-b במרחב העמודות של A. כלומר $b-Ax^*$ ניצב למרחב העמודות של A:.

$$b - Ax^* \perp Ax \Rightarrow$$
$$(b - Ax^*)Ax = 0$$
$$(Ax)^t (b - Ax^*) = 0$$
$$x^t A^t (b - Ax^*) = 0$$
$$x^t (A^t b - A^t Ax^*) = 0$$
$$(A^t b - A^t Ax^*)x = 0 \Rightarrow x \perp A^t b - A^t Ax^* \Rightarrow A^t b - A^t Ax^* = 0 \Rightarrow A^t Ax = A^t b$$

כלומר $A^t A$ ריבועית ולמערכת יש פתרון. אם $A^t A$ הפיכה אז יש פתרון יחיד.

אם העמודות של A בת"ל $\Leftarrow$ $A^t A$ הפיכה.

שיטה:

אם נתון $W = span\{v_1, ..., v_k\}$ במרחב במימד n, ונתון b וקטור ב-מימד n. ורוצים למצוא את הוקטור הכי קרוב ל-b ב-W אז:

דרך א:

1) ניצור בסיס אורתוגונלי ל-W. נסמן אותו $\{w_1, ..., w_l\}$.
2) הוקטור הדרוש הוא: $(b, w_1)w_1 + ... + (b, w_l)w_l$. (עד 3 וקטורים זה לא נורא).

דרך ב':

1) אם הבסיס הנתון אינו בת"ל צריך להגיע לבסיס בת"ל.
2) A הוא מרחב העמודות של $A = [v_1 | ... | v_k]$.

3) נפתור את המערכת $Ax=b$. אם קיים פתרון אז b במרחב העמודות של A ואז הפתרון הוא b.

4) אם אין פתרון אז נפתור את המערכת: $A^tAx = A^tb$.

5) אם הבסיס בת"ל אז יש פתרון יחיד ונקרא לו x^*. נכפיל ב-A – כלומר Ax^* הוא הוקטור הקרוב ביותר ל-b.