5.6.2008

(1)

תרגיל: לבדוק התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$

פתרון: ראינו כי זהו טור Leibnitz ולכן השארית:

$$\left|S_N - \sum_{n=1}^{\infty}\right| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}\right| \le \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}} \le \frac{x^2}{1+(N+1)x^2} \underset{x\neq 0}{\le} \frac{x^2}{(N+1)x^2} = \frac{1}{N+1}$$

עבור $x=0$ $|\Sigma|=0$ ולכן זה נכון לכל x.

$\frac{a_1}{1-q} =$ הנדסי אינסופי

לכן מקבלים התכנסות במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

הערה: בשאלה זו אנו יכולים לחשב את הסכום האינסופי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n} = -x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\frac{1}{1+x^2}} = \frac{-x^2}{x^2+2}$$

שימו לב, קיבלנו פונקציה רציפה וזה חייב להיות המקרה כי הטור מתכנס במ"ש.

תרגיל: לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

פתרון: התכנסות נקודתית ניתן לבדוק עפ"י מבחן Cauchy (כמו בתרגיל הקודם)

נחשב את הסכום

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \underset{x\neq 0}{=} x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1$$

אם $x=0$, $\Sigma=0$ לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \to \begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

פונקציה לא רציפה $\Leftarrow$ אין התכנסות במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

(*) כדי לבדוק התכנסות במ"ש נחשב את השארית של הטור:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^{N}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\right| = \frac{1}{(1+x^2)^N} \left(< \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^N} \xrightarrow{N\to\infty} 0\right)$$

עבור $x=0$: $\left|\sum^{\infty} - \sum^{N}\right| = 0$

מכאן אנו רואים כי בכל תחום המוכל ב- $(-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,\infty)$

ההתכנסות היא במ"ש.

תרגיל: להראות כי $\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $\quad 0\le x\le 1$

פתרון: ל-x כניל ≥ 0

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n$$

ההתכנסות היא במ"ש כי $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ מתכנס במ"ש לכל $0\le x$ (לפי דיני)

(לפי דיני: סד' $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ - סד' של פ' רציפות, מונוטוניות עולה)

לכן

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n\,dx}_{} =$$

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\log x)^n\, d\left(x^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{x^{n+1}(\log x)^n}{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\, n \cdot \frac{(\log x)^{n-1}}{x}\,dx = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\log x)^{n-1}\,dx =$$

לפי אינדוקציה $= (-1)\frac{n!}{(n+1)^n} =$

$= \sum \frac{1}{n^n}$ נציב חזרה ונקבל במקום האינטגרל