

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$$

תרגיל: עקרון התכנסות של

הנני רואה כי עבור Leibnitz ולפי הסימנים

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}} \leq \frac{x^2}{1+(N+1)x^2} \leq \frac{x^2}{(N+1)x^2} = \frac{1}{N+1}$$

הקשר = q
→ סימנים 1-q

עבור x=0, |Σ|=0 ולכן זה נכון לכל x

לכן מקבלים התכנסות קיימת ב-R

הערה: קבוצה זו אינה יכולה להשקיף את הנקודה האישית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n} = -x^2 \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2}{x^2+1}$$

שימו לב, הקבוצה פתוחה וצפופה וזה חייב להיות המקרה כי ה-R מתכנס בהמשך.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

תרגיל: עקרון התכנסות ה-R

הנני רואה התכנסות נקודתית ללא עקרון עם מבחן Cauchy (מבחן קושי) (פרק)

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$$

משקל הנכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

פתוחה על צפופה ⇔ אין התכנסות קיימת ב-R

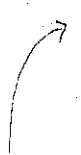
* כדי לעקור התכנסות קיימת, נחשב את הנגזרת של ה-R:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^N \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \frac{1}{(1+x^2)^N} \left(\frac{1}{(1+x^2)^N} \rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \right) = 0$$

מכאן, אנו רואים כי קבוצת תחום ההגדרה היא $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$ והתכנסות היא קיימת.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

בעזרת זה



$$\frac{1}{x^x} = e^{-x \log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n$$

הערה:

עבור $x > 0$ ישנו נוסחה (Dini) עבור

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

הנוסחה מתקיימת עבור

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} > 0$$

(Dini)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n dx =$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\log x)^n d(x^{n+1}) =$$

$$= \frac{x^{n+1} (\log x)^n}{n+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} n \cdot \frac{(\log x)^{n-1}}{x} dx = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (\log x)^{n-1} dx =$$

$$= (-1) \frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$= \sum \frac{1}{n^n}$$

הנוסחה מתקיימת עבור