חדו"א 2
תרגול

2.6.2008

חישוב של אורך העקומה

בהינתן עקומה $\Gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $(\varphi(t),\psi(t))\in C^1[0,1]$

$$L=\int_0^1\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

הסטנדרטית
$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

<u>תרגיל:</u> תבדקו בעזרת הנוסחה להחלפת המשתנה באינטגרל כי אם עושים פרמטריזציה של העקומה ע"י $s=h(t)$, h-חח"ע ועל אזי האורך של Γ נשאר אותו דבר.

<u>תרגיל:</u> חשבו את אורך העקומות הבאות:

א) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

ב) $y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, $x\in[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

$x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos t$

$y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin t$

א) צריך לבחור פרמטריזציה לעקומה. אם נסמן

נסתכל על קואורדינטות חדשות: $\tilde{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $\tilde{y}=y^{\frac{1}{3}}$

אז המשוואה של העקומה $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=(a^{\frac{1}{3}})^2 \Leftarrow$ זאת משוואת המעגל ב $\tilde{x},\tilde{y}$ (רדיוס $a^{\frac{1}{3}}$).

נבחר פרמטריזציה כרגיל למעגל:

$$\left.\begin{aligned}x^{\frac{1}{3}}&=\tilde{x}=a^{\frac{1}{3}}\cos t\\ y^{\frac{1}{3}}&=\tilde{y}=a^{\frac{1}{3}}\sin t\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}$$

(פרמטריזציה סטנדרטית למעגל ברדיוס a: $x^2+y^2=a^2$, $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.)

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t \qquad \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(3a)^2(\sin^4 t\cos^2 t+\cos^4 t\sin^2 t)}\,dt=3a\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\,dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\boxed{6a}$$

(ק) שימו לב כי העקומה רציפה ב $x=0$ אך לא גזירה. בתוצאה מכך, נקבל כי האורך אינסופי.

פרמטריזציה: $y=x\sin\frac{1}{x}$, $x=x$

$$\frac{dx}{dx}=1 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}}\,dx$$

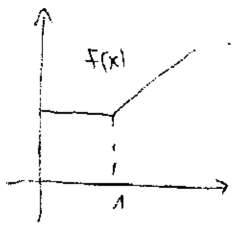
המשך יבוא...

התכנסות של סדרות וטורים של פונקציות

תרגיל: לחקור התכנסות של $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $0\le x\le\infty$

פתרון: התכנסות נקודתית:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1 \quad f(x)=1\\ 1 & x=1 \quad f(x)=1\\ x & x>1 \quad f(x)=x\end{cases}$$



$f_n(x) \rightrightarrows f$ כי:

(1) עבור $0\le x\le 1$: $1\le f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}\le 1+\frac{x^n}{n}\le 1+\frac{1}{n}$

$$\left[(1+x^n)\le\left(1+\frac{x^n}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{x^n}{n}+\dots\right]$$

מכאן $f_n \rightrightarrows f(x)$ בקטע $[0,1]$ כי $|f_n(x)-\underset{f(x)}{1}|<\frac{1}{n}$

(2) $x>1$: $x\le f_n(x)=x\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}\le x\left(1+\frac{1}{nx^n}\right)=x+\frac{1}{nx^{n-1}}\le x+\frac{1}{n}$

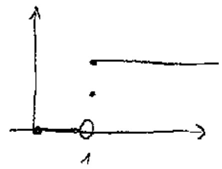
$\Leftarrow$: $|f_n(x)-\underset{f(x)}{x}|<\frac{1}{n}$

מכאן התכנסות במ"ש בקטע $[1,\infty)$, ולכן סה"כ מתקיים כי $f_n\rightrightarrows f$ לכל $x\ge 0$

תרגיל: אותו דבר לגבי $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$, כש $x\ge 0$.

פתרון: התכנסות נקודתית:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases}0 , & x<1\\ \frac{1}{2} , & x=1 \\ 1 , & x>1\end{cases}$$



מכאן מיד רואים כי בקטע $[0,5]$ אין התכ' במ"ש (קטע זה מכיל אי רציפות).

כדי לחקור התכנסות במ"ש נסתכל על מונוטוניות של הסדרה

$$f_n(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

לכן כאשר $x<1$ $f_n(x)\downarrow$

$x>1$ $f_n(x)\uparrow$

בכל קטע $[0,1-\varepsilon]$ f_n סדרה מונוטונית של פונקציות רציפות שמתכנסת נקודתית

לפ' רציפה, לכן לפי משפט Dini יש <u>התכנסות במ"ש</u>

אותו דבר לקטע $[1+\varepsilon, M]$.

תרגיל: לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$ ב- $\mathbb{R}$.

פתרון: קל לבדוק התכ' נקודתית: עבור $x\neq 0$ לפי מבחן השורש
$x=0$ מקבלים $\sum 0$.

הטור הנ"ל מתכנס במ"ש $\overbrace{\text{כי הוא טור}}^{\text{בכל ה[illegible]}}$ Leibnitz.

$$\left|\sum^{N}(x)-\sum^{\infty}(x)\right|<\frac{x^2}{(1+x^2)^{N+1}}=$$ (לפי משפט Leibnitz)