26.5.08 (1)



## אינטגרלים לא אמיתיים

* כעת תמיד נבדוק רק האם אינטגרל מתכנס או מתבדר

<u>תזכורת:</u> מבחני השוואה לאינטגרלים לא אמיתיים של פונקציות אי שליליות:

(a) יהי $0\le f(x)\le g(x)$ אזי:

התכנסות של $\int g(x)dx$ גוררת התכנסות של $\int f(x)dx$.
התבדרות של $\int f(x)dx$ גוררת התבדרות של $\int g(x)dx$.

(b) אם $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=A>0$ (קצה סופי וחיובי, $f,g\ge 0$) אזי האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחד.

אם $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=0$ אזי התבדרות של $\int f(x)dx$ גוררת התבדרות של $\int g(x)dx$
התכנסות של $\int g(x)dx$ גוררת התכנסות של $\int f(x)dx$.

(ואם $A=\infty$ מתקיים ההפך).

"הסבר" ל-(b) במקרה של אינטגרציה על קטע אינסופי:
עבור $x$ מספיק גדול: $(A-\varepsilon)g(x)\le f(x)\le (A+\varepsilon)g(x)$

ולכן, התכנסות של $\int g(x)dx \Rightarrow$ התכנסות של $\int f(x)dx$.
וכן, התכנסות של $\int f(x)dx \Rightarrow$ התכנסות של $\int (A-\varepsilon)g(x) = (A-\varepsilon)\int g(x)dx$.

<u>תרגיל 1:</u> האם $\int_0^\infty \frac{dx}{1+(x\sin x)^2}$ מתכנס?

* אין בעיה עם האינטגרנד בסביבת התחום המוגדר, הבעיה היא רק בכך שהאינטגרל שואף ל-$\infty$.

<u>פתרון:</u> $1+(x\sin x)^2\le 1+x^2$ (כי $\sin^2 x\le 1$) $\Leftarrow$ נמשיך אחרי הפרסומות.

<u>תרגיל 2:</u> האם $\int_0^1 \frac{dx}{\log x}$ מתכנס?

<u>פתרון:</u> $\frac{1}{\log x}$ אינה מוגדרת עבור $x=0$ ו- $x=1$. לפי ההגדרה $\int \frac{dx}{\log x}$ קיים אמ"מ קיים כל אחד מהאינטגרלים: $I_1=\int_{\frac12}^1 \frac{dx}{\log x}$ $\quad I_2=\int_0^{\frac12}\frac{dx}{\log x}$

* חילקנו את הקטע לקטעים כדי שבכל חלק תהיה נקודה בעייתית אחת.

$\log x\to -\infty$ : $x\to 0 \Rightarrow \frac{1}{\log x}\to 0$ ולכן $\frac{1}{\log x}$ חסומה ב- $[0,\frac12]$ ולכן $\int_0^{\frac12} f(x)dx$ מתכנס.

<u>נבדוק את $I_1$:</u> $\frac{1}{\log x}<0$ לכל $x\in[\frac12,1]$ (לא משנה שהפונקציה שלילית כי התכנסות כמו התכנסות של פונקציה חיובית - העיקר שאינו משנה סימן).

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)=\left\{\frac{0}{0}\right\}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1>0 \qquad \left(\log x \underset{x\to 1^-}{\sim} x-1 \text{ לפי טיילור}\right)$$

לכן, לפי (b) האינטגרל $I_1$ מתכנס/מתבדר ביחד עם

$$\int_{\frac12}^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-1|\Big|_{\frac12}^{1-\varepsilon}\right) \Rightarrow \text{מתבדר} \Rightarrow \int_0^1\frac{dx}{\log x} \text{ מתבדר!}$$

מש"ל ☒

## אינטגרלים לא אמיתיים של פ' משנות סימן

<u>תזכורת:</u> מבחני אבל ודיריכלה:

יהי $f\in C[a,\infty)$ , $g\in C^1[a,\infty)$ , $g$ - מונוטונית.

$$\left.\begin{array}{ll}(A) & \text{אם קיים } \int_a^\infty f(x)dx \text{ ו- } g(x) \text{ חסומה.}\\ (D) & \text{אם } \int_a^b f(x)dx \text{ חסום (לכל } b>a\text{) ו- } g(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0.\end{array}\right\} \Rightarrow \int f(x)g(x)dx \text{ מתכנס.}$$

<u>תרגיל:</u> האם $\int_0^\infty x\sin(e^x)dx$ מתכנס? ⊛ למרות שהפונקציה אינה מתכנסת באינסוף ייתכן והאינטגרל יתכנס.

<u>פתרון:</u>

$$\int_0^\infty x\sin(e^x)dx=\left\{\begin{array}{l}t=e^x\\dt=e^xdx\end{array}\right\}=\int_1^\infty \frac{\ln t}{t}\cdot\sin t\cdot dt$$

נסמן $g(t)=\frac{\ln t}{t}$ $\Leftarrow$ $g'(t)=\underset{(t>e \text{ עבור})}{\frac{1-\ln t}{t^2}<0}$

לכן $g(t)$ מונוטונית יורדת $\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

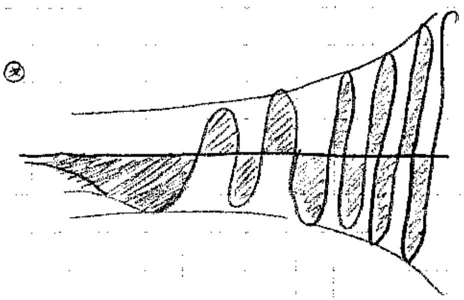
נסמן $f(t)=\sin t$ אז $\left|\int_a^b \sin t\,dt\right|=\left|\cos t\,\Big|_a^b\right|\le 2$

התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן

$\int_0^\infty x\sin(e^x)dx$ מתכנס.

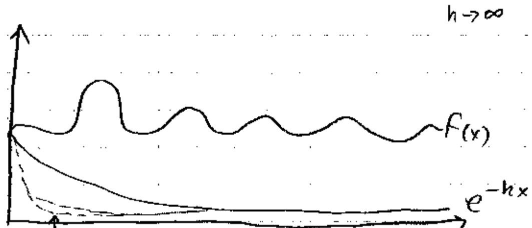
<u>הערה:</u> שימו לב כי $\lim_{x\to\infty} x\sin(e^x)=\infty$

⊛ אנו שמים לב שלמרות שהפונקציה שואפת לאינסוף, גודל השטחים הולכים וקטנים ולכן התמונה שלהם קטנה. מכאן, שהאינטגרל בכל זאת מתכנס למרות שהפונקציה מתבדרת (זהו הסבר לאחר שהוכחנו שהאינטגרל מתכנס ולא הוכחה בפני עצמה).



<u>תרגיל:</u> ("חישוב" של אינטגרל לא אמיתי): יהי $f\in C[0,\infty)$ חסומה.
הוכיחו כי

$$\lim_{h\to\infty} h\int_0^\infty e^{-hx}f(x)dx=f(0)$$




<u>פתרון:</u> (נתחיל) כאשר $f(x)=1$:

$$\int_0^\infty e^{-hx}dx=-\frac{e^{-hx}}{h}\Big|_0^\infty=\frac{1}{h}\Leftrightarrow h\int_0^\infty e^{-hx}dx=1$$

26.5.08 (3)

חדו"א 2 + תרגול

<u>מסקנות:</u> לכל $f$ כנ"ל $\int_0^\infty e^{-hx} f(x)dx$ מתכנס.

$|f(x)| \le M$ ולכן מתכנס $\Leftarrow$ $\int_0^\infty |e^{-hx}\cdot f(x)|\,dx = \int_0^\infty e^{-hx}|f(x)|\,dx \le M\cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-hx}\,dx}$

ולכן, האינטגרל הנ"ל מתכנס בהחלט!

עתה נוכיח כי:

$$\lim_{h\to\infty}\left[h\int_0^\infty e^{-hx}f(x)dx - f(0)\right] = 0$$ (ספק לפתרון השאלה)

$$\lim_{h\to\infty}\left[h\int_0^\infty e^{-hx}f(x)dx - f(0)\right] = \lim_{h\to\infty}\Big[h\int_0^\infty e^{-hx}f(x)dx - \underbrace{h\cdot\int_0^\infty e^{-hx}}_{1}\underset{\text{קבוע}}{f(0)}dx\Big]$$

$$= \lim_{h\to\infty} h\int_0^\infty e^{-hx}[f(x)-f(0)]\,dx = \lim_{h\to\infty} h\left\{\int_0^a e^{-hx}[f(x)-f(0)]\,dx + \int_a^\infty e^{-hx}[f(x)-f(0)]\,dx\right\}$$

את $a$ נבחר לפי השיקול הבא: מהרציפות של $f(x)-f(0)$ קיים קטע $[0,a]$ כך שלכל $x\in[0,a]$ $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, (כדי שהתרומה של השמאלי תהיה 0, והאינטגרל הימני גם כן הוא 0 ולכן הכל יהיה שווה ל-0).

נוכיח כי $\lim_{h\to\infty}\left|h\int_0^\infty e^{-hx}[f(x)-f(0)]dx\right|=0$:

$$\left|h\int_0^a e^{-hx}(f(x)-f(0))\,dx\right| \le h\int_0^a |e^{-hx}(f(x)-f(0))|\,dx \le h\int_0^a e^{-hx}\varepsilon\,dx \le \varepsilon$$

$$\left|h\int_a^\infty e^{-hx}(f(x)-f(0))\,dx\right| \le h\int_a^\infty e^{-hx}\underbrace{|f(x)-f(0)|}_{\le 2M}\,dx \le 2M\, h\int_a^\infty e^{-hx}dx = 2M\cdot e^{-ha}$$

כאשר $\sup_{x\in[0,\infty]} f(x) = M$. לכן לכל $\varepsilon$:

$$\left|h\int_0^\infty e^{-hx}(f(x)-f(0))dx\right| \le \varepsilon + 2Me^{-ha} \xrightarrow[h\to\infty]{} \varepsilon$$

לכן, $\overline{\lim_{h\to\infty}}\left|h\int_0^\infty e^{-hx}(f(x)-f(0))dx\right|<\varepsilon$ לכל $\varepsilon$ $\Leftarrow$ $0 \le \underline{\lim_{h\to\infty}}|\quad| < \overline{\lim_{h\to\infty}}|\quad| \le 0$

ומכאן, שאכן הגבול קיים ושווה ל-0. ☑