חדו"א 2 - תרגול

שימוש של אינטגרלים מסוימים

תרגיל: לחשב את $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$

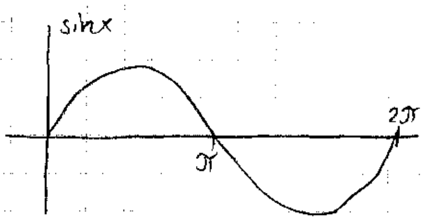
פתרון: נזהה את הביטוי בתוך הגבול כסכום רימן של $f(x)=x^p$ בקטע $[0,1]$ כאשר $T: x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_n=\frac{n}{n}=1$ (חלוקת הקטע) ונקח $\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$S(x^p,T,\xi_i)=\sum \underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^p}_{f(\xi_i)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}=\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$$

$x^p\in R[0,1]$, ולכן $\lambda(T)=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן

$$L=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

הערה: ניתן לחשב את אותו הגבול גם בעזרת הלמה של שטולץ.



תרגיל: למצוא את הסימן של האינטגרל $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$

פתרון: $x>0$ לכל $x\in[0,2\pi]$

$\sin x\geq 0$ לכל $x\in[0,\pi]$

$\sin x\leq 0$ לכל $x\in[\pi,2\pi]$

(*) x תמיד חיובי, אך הפונקציה $\sin x$ משנה סימן.

נפצל את I ל-2 אינטגרלים:

$$I=\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\sin x\,dx}_{I_1>0}+\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}\sin x\,dx}_{I_2<0}$$

נעשה החלפת משתנים ב-I_2: $t=x-\pi$ ונקבל

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}\,dt=-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\,dt$$

ולכן I יהפוך להיות:

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x}{x+\pi}\right)dx=\int_0^{\pi}\underbrace{\sin x}_{\geq 0}\Big(\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}}_{\geq 0}\Big)\,dx>0$$

הפונקציה מתחת לאינטגרל רציפה וגם ≥ 0 ולכן $I>0$.

תרגיל: למצוא $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\cos^2 t\,dt$

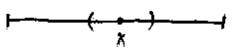
פתרון: גבול מסוג $\frac{0}{0}$ ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1}=\cos^2(0)=1$$

23.5.08

(2)

<u>תרגיל:</u> להוכיח שאם $\int_a^b f^2(x)dx=0$ אז $f(x)\equiv 0$ לכל $x\in[a,b]$ - נק' רציפות של $f(x)$.



<u>פתרון:</u> נניח בשלילה (נניח x נק' רציפות של $f(x)$ ו- $f(x)=c\neq 0$), מרציפות קיים הסב' I מסביב ל- x (שאורכו ε) כך ש-

$$|f(x)-c|<\frac{c}{2} \iff |f(x)|\geq \frac{c}{2}>0$$

$$\underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{\geq 0} = \int_{[a,b]/I} \overset{\geq 0}{f^2(x)}\,dx + \int_I \overset{\geq \frac{c^2}{4}}{f^2(x)}\,dx \geq 0+\int_I \frac{c^2}{4}\,dx = \frac{c^2}{2}\varepsilon>0$$

וזו סתירה!

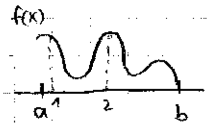
<u>הערה:</u> אם x - נק' אי רציפות אז יכול להיות $f(x)\neq 0$ לדוגמה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

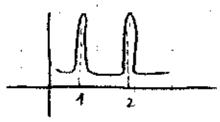
<u>תרגיל:</u> יהי $f(x)\in C[a,b]$, $f\geq 0$, הראו כי

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ p\in\mathbb{N}}}\left\{\int_a^b f^p(x)\,dx\right\}^{1/p}=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

<u>פתרון:</u> (*) תחילה נקבל אינטואיציה כללית ע"י בחינה של השפעת המעלות על הגרף של פונקציה $f(x)$ כלשהי:



$\xrightarrow{p\to\infty}$ $f^p(x)$

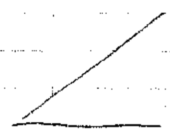


"אמתי"

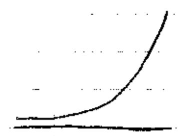
(*) בגרף הימני, מתחת את $f(x)$ (שימו לב שהגרף רק מתאר התנהגות ואינו באותו Scale כמו השמאלי).

כדי להבין את התופעה נתבונן בגרפים:

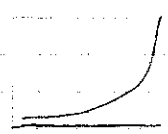
$f(x)=x$
$[0,1]$



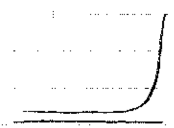
$f^2(x)=x^2$



$f^3(x)=x^3$



$f^4(x)=x^4$



נסמן $M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, נעריך את האינטגרל:

$$\int_a^b f^p(x)\,dx \leq \int_a^b M^p dx = M^p(b-a) \Leftarrow f^p(x)\leq M^p \Leftarrow f(x)<M$$

$$\left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leq M(b-a)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} M \quad \Leftarrow$$

<u>הערה:</u> רואים כי אורך הקטע לא משפיע על האינטגרל שקיבלנו ולכן הרעיון להעריך את הביטוי הנ"ל מלמטה.

נבחר x_0 כך ש- $f(x_0)=M$, נבחר קטע $x_0\in I$ כך ש- $f(x)>M-\varepsilon$ (משתמשים כאן ברציפות של $f(x)$).

$$\int_a^b f^p(x)dx = \int_{[a,b]/I} \overset{\geq 0}{f^p(x)}dx + \int_I f^p(x)\,dx \geq \int_I (M-\varepsilon)^p \underbrace{|I|}_{\text{אורך הקטע } I} \Rightarrow \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} \geq (M-\varepsilon)|I|^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} M-\varepsilon$$

סה"כ קיבלנו:

$$M-\varepsilon \le \underline{\lim}\ (\dots)^{1/p} \le \overline{\lim}\ \left(\int f^p(x)\,dx\right)^{1/p} \le M$$

לכל ε $\Leftarrow$ $\overline{\lim} = \underline{\lim}$ ולכן הגבול קיים ושווה ל- M. ⊠

<u>תרגיל:</u> אי שוויון קושי - שוורץ:

יהי $f(x),g(x)\in R[a,b]$ אז מתקיים:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

* זהו אי שוויון מאוד חשוב ובהמשך נראה הרבה דברים שמתבססים עליו.

<u>הוכחה:</u> נשתמש באי-שוויון קושי-שוורץ לסכומים:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

נסתכל על סכום רימן:

$$\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,g(\xi_i)\,\Delta x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \left[f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right]\left[g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right]\right)^2 \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\,\Delta x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(\xi_i)\,\Delta x_i\right)$$

f,g פונק' אינטגרביליות ולכן גם $f\cdot g$ ולכן כאשר משאיפים את $\lambda(T)\to 0$ הצד השמאלי שואף ל- $\int f(x)g(x)\,dx$ והצד הימני שואף ל- $\int f^2(x)dx\cdot\int g^2(x)dx$.

⊠