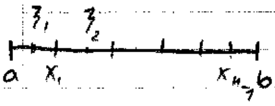
22.5.08 (1)

חדו"א 2 - תרגול

(*) f פ׳ בקטע $[a,b]$. ניקח חלוקה T $a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$

נבחר נקודות ξ_i ב $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$

נסמן $\lambda(T)=\max\limits_{x_i\in T}\Delta x_i$



(*) $|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - I|<\varepsilon$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל T עם $\lambda(T)<\delta$ מתקיים (*) אז קוראים ל-f אינטגרבילית Riemann ב-$[a,b]$ ו- $\int_a^b f(x)dx=I$

* כיצד נבדוק האם פונקציה היא אינטגרבילית במובן רימן?

<u>קריטריון דרבו לאינטגרביליות של פ׳ f</u>

תהי T - חלוקה. נסמן $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. $\omega_i=M_i-m_i$

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל T, עם $\lambda(T)<\delta$ מתקיים: $|\sum \omega_i\Delta x_i|<\varepsilon$,

<u>אילו פונקציות אינטגרביליות?</u>

① פונקציות רציפות

② פונקציות רציפות למקוטעין (מס׳ סופי של נק׳ אי רציפות)

③ פונקציות מונוטוניות.

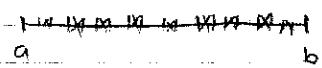
<u>תרגיל:</u> האם פונקצית רימן היא אינטגרבילית בקטע סופי?

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q}\ (\text{שבר מצומצם})\end{cases}\qquad (x>0)$$

<u>הערה:</u> $f(x)$ רציפה בכל $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

<u>הוכחת הערה:</u> נבחר N: $A_N=\#\{x \mid x\in\mathbb{Q}\ (x=\frac{p}{q}),\ q<N\}=a_n<\infty$ לכן לכל $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ קיים קטע שמכיל את y ולא מכיל נק׳ מהקבוצה הנ"ל. לכן בתוך הקטע $|f(x)|<\frac{1}{n}$ ולכן $f(x)$ רציפה עבור כל נק׳ אי רציונליות. בנק׳ רציונליות $f(x)$ <u>לא רציפה</u>.

<u>פתרון:</u> $f(x)$ אינטגרבילית. כדי להוכיח זאת נשתמש במבחן דרבו.



נבחר חלוקה T. בכל קטע $I\subset T$ שלא מכיל נקודות מ-A_N, $|f(x)|<\frac{1}{N}$ ולכן

ולכן $m_i=0$, $M_i < \frac{1}{N}$, $w_i \le \frac{1}{N}$

נסתכל ב:

$$\sum w_i \Delta x_i = \underbrace{\sum \overset{\wedge}{w_i} \Delta x_i}_{\text{קטעים שמכילים נק' מ-}A_N} + \underbrace{\sum \overset{\le \frac{1}{N}}{w_i} \Delta x_i}_{\text{קטעים שלא מכילים נק' מ-}A_N}$$

$$\sum_{\text{קטעים שמכילים נק' מ-}A_N} w_i \Delta x_i \le \underbrace{\sum \overset{\le \lambda(T)}{\Delta x_i}}_{\substack{a_N \\ \text{מחוברים}}} \le a_N \cdot \lambda(T)$$

$$\sum_{\text{קטעים שלא מכילים נק' מ-}A_N} w_i \Delta x_i \le \sum \frac{1}{N} \Delta x_i = \frac{1}{N} \cdot \sum \Delta x_i \le \frac{1}{N} |b-a|$$

$$\Rightarrow \left|\sum w_i \Delta x_i\right| \le \frac{1}{N}|b-a| + a_N \lambda(T)$$

בהינתן $\varepsilon>0$ נקח $N > \frac{2|b-a|}{\varepsilon}$ ונבחר $\delta < \frac{\varepsilon}{2a_N}$ ואז לכל T עם $\lambda(T)<\delta$:

$$\left|\sum w_i \Delta x_i\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

<u>הערות</u>

① פונ' דיריכלה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

אינה אינטגרבילית: בכל קטע I $M_I=1$, $m_I=0$ $\Leftarrow$ $W_I=1$

לכל T $\sum w_i \Delta x_i = \sum \Delta x_i = b-a \neq 0$ ולכן $f(x)$ לא אינטגרבילית.

② ניתן לכתוב את פונ' דיריכלה:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \qquad f_D = \varphi \circ \underset{\text{פונ' רימן}}{\underset{\uparrow}{f_R}}$$

φ , f_R אינטגרביליות אך ההרכבה <u>שלהם לא!</u>