19.5.08

1

חדו"א 2 - תרגול 4

אינטגרציה של פונ' רציונליות

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\frac{F(x)}{Q(x)} \qquad (\deg F(x)<\deg Q(x))$$

$$Q(x)=\prod_i (x-a_i)^{k_i}\prod_j \underbrace{(x^2+px+q)^{k_j}}_{\text{אין שורשים ממשיים}}$$

a_i שורשים של Q

סכום של איברים מהצורה

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{A_{s_i}}{(x-a_i)^{s_i}} \qquad (1\le s_i\le k_i)$$

ו-

$$\frac{m_{k_j}x+n_{k_j}}{(x^2+px+q)^{t_j}} \qquad (1\le t_j\le k_j)$$

דוגמאות:

1

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{mx+n}{x^2+2x+5}=\frac{A(x^2+2x+5)+(mx+n)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

$$=\frac{(A+m)x^2+(2A+n-m)x+5A-n}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

לכן,

$$x+2=(A+m)x^2+(2A+n-m)x+5A-n$$

שני פולינומים שווים אם ורק אם המקדמים שלהם שווים:

$$\left.\begin{aligned} A+m&=0\\ 2A+n-m&=1\\ 5A-n&=2\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} A&=\tfrac{3}{8}\\ m&=-\tfrac{3}{8}\\ n&=-\tfrac{1}{8}\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \frac{x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{3}{8}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\frac{3x+1}{x^2+2x+5}$$

2

$$\frac{x^4}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

תחילה נבצע חילוק פולינומים:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-\sqrt{2}x+1\\ \hline x^4 \;\big)\; x^2+\sqrt{2}x+1\\ x^4+\sqrt{2}x^3+x^2\\ \hline -\sqrt{2}x^3-x^2\\ -\sqrt{2}x^3-2x^2-\sqrt{2}x\\ \hline x^2+\sqrt{2}x\\ x^2+\sqrt{2}x+1\\ \hline \boxed{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \frac{x^4}{x^2+\sqrt{2}x+1}=x^2-\sqrt{2}x+1-\underbrace{\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}}_{\text{אין שורשים ולכן זה כבר שבר פשוט}}$$

$$\Rightarrow\quad x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

<u>הערה:</u> לשני הפולינומים הנ"ל אין שורשים ממשיים ולכן הם אי פריקים ולכן הפירוק של הפולינום x^4+1 לגורמים אי פריקים היא $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

②

③ $$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$1 = ax^3 + bx^2 - a\sqrt{2}x^2 - b\sqrt{2}x + ax + b + cx^3 + dx^2 + c\sqrt{2}x^2 + d\sqrt{2}x + cx + d$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & a + c = 0 \\ x^2: & -a\sqrt{2} + c\sqrt{2} + b + d = 0 \\ x: & -b\sqrt{2} + d\sqrt{2} + a + c = 0 \\ x^0: & b + d = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b + d = 1 \\ b = d = \frac{1}{2} \\ c = -a = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

אחר פתרון מערכת משוואות

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

④ $$\frac{x^5-2}{x+1} = ?$$

$$\begin{array}{l} \quad x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ x^5 - 2 \ \big) \ x+1 \\ \underline{x^5 + x^4} \\ -x^4 - 2 \\ \underline{-x^4 - x^3} \\ x^3 - 2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 - 2 \\ \underline{-x^2 - x} \\ x - 2 \\ \underline{x + 1} \\ -3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^5-2}{x+1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{3}{x+1}$$

מכאן ניתן להמשיך כרגיל.

תרגיל:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^4: & A + B = 0 \\ x^3: & C - 2B = 0 \\ x^2: & 2A - 2C + D = 2 \\ x: & -2B + C - 2D + E = 2 \\ x^0: & A - 2C - 2E = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = 1 \quad B = -1 \quad C = -2 \quad D = -3 \quad E = -1$$

(לא כולל חישובים).

המשך

$$\Rightarrow \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctan x + C$$

אינטגרציה ע"י הצבה לפי רציונליות:

דוגמא מאוד חשובה:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

כאשר $R(x,y)$ - פ' רציונלית של 2 משתנים $\quad R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\quad$ P,Q-פולינומים ב-x,y

טענה: לכל פונק' מהצורה הנ"ל קיימת פונ' קדומה אלמנטרית. דרך למצוא את פ' הקדומה היא ע"י הצבה אוניברסלית:

$$t=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int \underbrace{R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)dt}_{\text{פ' רציונלית של } t}$$

דוגמאות:

$$① \int \frac{dx}{\sin x} = \left\{t=\tan\frac{x}{2}\right\} = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

דוגמאות לפונ' רציונליות של x, y:

$$R(x,y) = \frac{x^2y+y^2+2}{x^3+2y^2} \Rightarrow R(\cos x, \sin x) = \int \frac{\cos^2 x\sin x + \sin^2 x + 2}{\cos^3 x + 2\sin^2 x}\,dx$$

במקרה של הדוגמה קודם $R(x,y)=\frac{1}{y}$.

② $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left\{ t = \tan\frac{x}{2} \right\} = \int \frac{(1+t^2)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{8}_{4}\, t^3} \cdot \frac{\cancel{2}\, dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt$$

במקרים מסויימים יותר נח לעשות הצבות אחרות (הצבה האוניברסלית תמיד עובדת אך לא תמיד השיטה היעילה ביותר לפתור את השאלה). למשל, אם הפונקציה מכילה רק חזקות זוגיות של $\cos x$ ו- $\sin x$ אזי ההצבה $t=\tan x$ תפתור את האינטגרל)

$$\frac{dt}{1+t^2} = dx \quad \Leftarrow \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (\tan^2 x + 1)\,dx$$

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$$

דוגמאות:

① $$\int \tan^2 x\,dx = \{t=\tan x\} = \int t^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int dt - \int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= t - \arctan t + c = \tan x - x + c$$

② $$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\underbrace{(1-\sin^2 x)}_{\cos^2 x}\,\underbrace{d\sin x}_{\cos x\,dx} = \{t=\sin x\}$$

$$= \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

③ $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\,d(\cos x) = \{t=\cos x\} = -\int\left(1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^2 x} + C$$

④ $$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x} = \{t=\tan x\} = \int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,\cancel{(t^2+1)}\cdot\frac{dt}{\cancel{1+t^2}} =$$

$$= \int\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + C$$

⑤ $$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int\frac{\sin^2(2x)}{4}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\underbrace{\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx}_{(\sin^2 2x)} + \int\sin^2(2x)\cdot\frac{d(\sin 2x)}{2}\right) = \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{16}\,\frac{\sin^3 2x}{3} + C$$

19.5.08

4 תרגיל - 2 חדו"א

⑤ $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\cos x} & du = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx \\ v = -\cot x & dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{\cos x}}\frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} - \int \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cos^{\cancel{2}} x}dx\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\sin x} - \int \frac{dx}{\cos x}$

$= \left\{\begin{matrix} x = t - \frac{\pi}{2} \\ dx = dt \end{matrix} \quad \cos x = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \right\} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2\sin x} - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$