15.5.08
1

הרצאה 2 - תרגול 2 (אנג)

<u>תרגיל</u> 1

$m \ge 0 \quad \int x^m e^x \, dx = ?$

<u>פתרון:</u>

נסמן את האינטגרל הרצוי ב- I_m

$I_0 = e^x + C$

חישבנו קודם:

$(I_1 = (x-1)e^x + C)$

נחשב את I_m לפי האינדוקציה:

$$I_m = \int x^m e^x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u(x) = x^m & v(x) = e^x \\ u'(x) = m x^{m-1} & v'(x) = e^x \end{matrix} \right\} = x^m e^x - \int e^x m x^{m-1} \, dx$$

$$= x^m e^x - m I_{m-1}$$

כעת נחשב את

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1 = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

2

$$I_m = \int \sin^m x \, dx = ?$$

$$I_m = \int \underset{\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x}{\sin^m x \, dx} = \left\{ \begin{matrix} u(x) = \sin^{m-1} x & v(x) = -\cos x \end{matrix} \right\} = -\sin^{m-1} x \cos x + \int \cos x (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)(I_{m-2} - I_m)$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot I_m = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2}$$

$$I_m = -\frac{1}{m} \cos x \cdot \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2} \quad (+C)$$

<u>תנאי התחלה:</u>

$I_0 = x \quad (+C)$

$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x \quad (+C)$

<u>דוגמאות:</u>

$I_2 = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + C$

$I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}(-\cos x) + C$

שיטת ההצבה נגזרת מכלל השרשרת:

$$\left(G(\varphi(x))\right)' = G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + c$$

או באופן שקול:

$$\int F(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int F(t)\,dt$$

כאשר $t=\varphi(x)$

⊛ בנוסחה זו ניתן להשתמש ב-2 הכיוונים וזה יכול לגרום לבלבול לפעמים.
מצד אחד, ניתן לקחת אינטגרל כפונקציה מהצורה שבצד שמאל ואז אפשר להעביר אותה למצב בצד ימין.
מצד שני, ניתן להסתכל על צד ימין ולסמן $t=\varphi(x)$ ואז להציב את $\varphi(x)$ בתוך $F(t)$ ולהכפיל בנגזרת של $\varphi(x)$ (וגם כך הגענו לצד שמאל).

<u>דוגמאות:</u>

① $$\int (x^2+1)^5 x\,dx = \left\{\begin{matrix} F(x)=x^2 \\ \varphi(x)=x^2+1 \Rightarrow \varphi'(x)=2x \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^5 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int t^5\,dt = \frac{t^6}{2\cdot 6}+c = \frac{(x^2+1)^6}{12}+c$$

<u>הערה על סימונים:</u> במקום לכתוב כל פעם את $\varphi(x)$ ו-$\varphi'(x)dx$ מסמנים את $\varphi(x)$ ב-t ו-$dt=\varphi'(x)dx$.

② $$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left\{\begin{matrix} t=e^x \\ dt=(e^x)'dx=e^x dx \end{matrix}\right\}_{F(t)=\frac{1}{t^2+1}} = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c$$

$$=\arctan(e^x)+c$$

③ $$\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \left\{\begin{matrix} t=\tan x \\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{matrix}\right\} = \int e^t\,dt = e^t+c = e^{\tan x}+c$$

④ $$\int x e^{x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int e^t\cdot dt = \frac{e^t}{2}+c = \frac{e^{x^2}}{2}+c$$

⑤ $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} \quad \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x^2+1} \\ dt=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c = \arctan\sqrt{x^2+1}+c$$

(6) $$\int \sin(\ln x)\,dx = \begin{Bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{Bmatrix} = \int x\sin(\ln x)\underbrace{\tfrac{1}{x}dx}_{dt}$$

$$= \int e^t \sin t\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C = \frac{1}{2}e^{\ln x}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$$

עשינו כבר

$$= \frac{1}{2}x\,(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$$

(*) את האינטגרל הזה אפשר לחשב גם מהכיוון ההפוך, במקרה כזה נבחר $x=e^t$.

<u>הערות:</u>

מקרים פרטיים של נוסחת החלפת המשתנים:

(א) $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int_{t=ax+b} f(t)\,dt$$

(ב) נגזרת לוגריתמית: $\frac{f'(x)}{f(x)}$. $\Leftarrow$ $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \underset{t=f(x)}{=} \ln f(x)+C$$

דוגמא ל-(ב):

$$\int \frac{e^x}{e^x+5}dx = \int \frac{(e^x+5)'}{e^x+5}dx = \ln(e^x+5)+C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+7)'}{x^2+2x+7}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+7)+C$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|+C$$

דוגמאות לגירסה השנייה של שיטת ההצבה

(1) $(x>0)$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \begin{Bmatrix} x=s^6 \\ dx=6s^5ds \end{Bmatrix} = \int \frac{6s^5}{s^3(1+s^2)}ds = 6\int \frac{s^2}{1+s^2}ds =$$

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+s^2}\right)ds = 6s-6\int\frac{ds}{1+s^2} = 6s-6\arctan s+C = 6x^{\frac{1}{6}}-6\arctan x^{\frac{1}{6}}+C$$

(2) $(x\in[-1,1])$ $$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{Bmatrix} = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt = \int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\cdot dt$$

$$= \int \underset{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)}{\cos^2 t}\cdot dt = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C = \frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C \ominus$$

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

<u>עוד כמה דוגמאות של שיטת ההצבה:</u>

① $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \begin{cases} t = \tan x \\ dx = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases}$

$= \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln|\tan x| + C$

② $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin(2\frac{x}{2})} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} \underset{\text{לפי ①}}{=} \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

דרך אחרת

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

③ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \begin{bmatrix} x = a\tan t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{(a^2\tan^2 + a^2)^2}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,dt$

$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{(\tan^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C \; ⊜$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\tan t\cos^2 t = 2\tan t\cdot\frac{1}{\tan^2 t+1}$

$⊜\; \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{a}+1}\right) + C = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{ax}{x^2+a^2}\right) + C$

<u>אינטגרציה של פונקציות רציונליות</u>

<u>הגדרה:</u> פונקציה רציונלית $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $Q(x), P(x)$ פולינומים ב-x.

קודם כל נראה כיצד מחשבים את האינטגרלים הבאים:

① $\frac{A}{x-a}$ ③ $\frac{mx+k}{x^2+px+q}$

② $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n \ge 1$ ④ $\frac{mx+k}{(x^2+px+q)^n}$, $n \ge 1$

כאשר A, p, q, n, m, a מספרים, k - שלם חיובי ומניחים של- x^2+px+q אין שורשים ממשיים, כלומר $\boxed{p^2-4q<0}$ (תנאי חשוב!). הביטויים האלו (1,2,3,4) קרויים "שברים פשוטים".

<u>משפט:</u> כל פ' רציונלית ניתנת לביטוי כסכום של שברים פשוטים

תרגול 2 - תרגיל 2 (המשך)

① $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + c$

② $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$

③ נפרק במכנה ריבוע שלם: $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})$

(איך עושים את זה?) $(x^2+2\frac{p}{2}x+q+(\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2 \Rightarrow (x+\frac{p}{2})^2+(q-(\frac{p}{2})^2$

נגדיר $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ ונעשה החלפת משתנים $x=t-\frac{p}{2} \Leftarrow t=x+\frac{p}{2} \Leftarrow x^2+px+q=t^2+a^2$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx = \begin{Bmatrix} x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{Bmatrix} = \int \frac{m(t-\frac{p}{2})+n}{t^2+a^2}\,dt$$

$$=\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + (n-\frac{mp}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{m}{2}\int\frac{(t^2+a^2)'}{t^2+a^2}\,dt + (n-\frac{mp}{2})\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1}$$

$$= \frac{m}{2}\ln|t^2+a^2| + \frac{1}{a}(n-\frac{mp}{2})\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+c$$

$$= \frac{m}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{\sqrt{4a-q^2}}\arctan\left(\frac{2x-p}{\sqrt{4p-q^2}}\right)+c$$

④ עושים עם אותה הדרך

$$\int\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{m}{2}\int\frac{\overset{d(t^2+a^2)}{2t\,dt}}{(t^2+a^2)^k} + (n-\frac{mp}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$= \frac{m}{2}\left[-(k-1)\right]^{-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + (n-\frac{mp}{2})\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}}_{\text{נסמן ב-} I_k}$$

$$I_k = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \begin{bmatrix} u=\frac{1}{(t^2+a^2)^k} & v=t \\ u'=-k\cdot\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} & v'=1 \end{bmatrix} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \int 2k\,\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt = -\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\left(\underset{I_k}{\underset{\shortparallel}{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}}} - a^2\underset{I_{k+1}}{\underset{\shortparallel}{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}}}\right)$$

$$= \frac{t}{t^2+a^2} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1} \Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{a^2}\,\frac{2k-1}{2k}\,I_k + \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k}$$

תנאי התחלה:

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

כאן סיימנו את מציאת הפונ' הקדומה של השברים הפשוטים.

מסקנה: לכל $R(x)$ פ' רציונלית קיימת פ' קדומה שהיא פונ' אלמנטרית.

הוכחה: לכל $R(x)$ ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים והראנו כי לכל שבר פשוט קיימת פונ' קדומה שהיא פונ' אלמנטרית.

13.3.08 ⑥

חדו"א 2 - תרגול 2 (או"ג)

<u>משפט:</u> כל פ' רציונלית $R(x)$ ניתן להציג כסכום של שברים פשוטים, כאשר

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{F(x)}{Q(x)} \qquad (\text{כאשר } \deg Q(x) > \deg F(x))$$

(פירוק של פולינום לשברים עם שארית)

$$Q(x) = \prod_i (x-a_i)^{k_i} \prod_j (x^2+p_j x+q_j)^{k_j}$$

$\frac{F(x)}{Q(x)}$ שווה לסכום של שברים פשוטים מהצורה:

$$\frac{A_1}{x-a_1},\ \frac{A_2}{(x-a_i)^2},\ \dots,\ \frac{A_{k_j}}{(x-a_i)^{k_i}} \qquad (\text{לכל } i)$$

$$\frac{m_1x+n_1}{x^2+p_jx+q_j},\ \frac{m_2x+n_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2},\ \dots\dots\ \frac{m_{k_j}x+n_{k_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}} \qquad (\text{לכל } j)$$

<u>דוגמאות</u>

① $$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

②