חדו"א - תרגול 2 (לב)

ימי ה'

1/6: 8:00-10:00 , 11:00-14:00

15/6: 9:00-11:00 , 12:00-14:00

<u>שיטת ההצבה</u>

מתבססת על נוסחת השרשרת:

$$(G(\varphi(t)))' = G'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

ולכן,
$$\Rightarrow \int G'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = G(\varphi(t)) + C$$

<u>לדוגמא:</u>

$$\int (\sin^{100}x)\cdot\cos x\cdot dx = \boxed{\begin{matrix}H(x)=x^{100}\\ \varphi(x)=\sin x\end{matrix}} = \int H(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot dx$$

עזר
$$= \boxed{\begin{matrix}G(x)=\frac{x^{101}}{101}\\ G'(x)=H(x)\end{matrix}} = G(\varphi(x)) + C = \frac{(\sin x)^{101}}{101} + C$$

<u>דוגמא 2</u>

$$\int (x^2+1)^5\cdot x\cdot dx = \begin{bmatrix}\varphi(x)=x^2+1 & \varphi'(x)\,dx = 2x\,dx\\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\varphi'(x)\,dx & \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \varphi(x)^5\cdot g'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi(x)^6}{6} + C = \frac{(x^2+1)^6}{12} + C$$

דרך רגילה שבד"כ משתמשים בה:

$$\int (x^2+1)^5 x\cdot dx = \begin{bmatrix}t=x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx\\ \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt\end{bmatrix} = \int t^5\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}t^6 + C =$$

$$= \frac{1}{12}t^6 + C = \frac{1}{12}(x^2+1)^6 + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \begin{bmatrix}t=e^x & dt=e^x dx\\ e^{2x}=t^2 & \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan(e^x)+C$$

<u>תרגיל</u>

$$\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx = \int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix}t=\tan x\\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}\,dx\end{bmatrix} = \int e^t\,dt = e^t + C$$

$$= e^{\tan x} + C$$

$$\int x e^{x^2} dx = \left[t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \right] = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} = \begin{bmatrix} s = \sqrt{t} & \\ ds = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt & \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2ds \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2ds}{s^2+1} = \int \frac{1}{s^2+1}\,ds = \arctan s + c = \arctan\sqrt{t} + c$$

$$= \arctan\left(\sqrt{x^2+1}\right) + c$$

היינו יכולים לפשט: שינוי משתנה יחיד? $s = \sqrt{x^2+1}$

<u>תרגיל</u>

$$\int \sin \ln x \, dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & dx = e^t dt \\ x = e^t & \end{bmatrix} = \int e^t \cdot \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + c = \frac{1}{2} e^{\ln x} (\sin \ln x - \cos \ln x) = \frac{1}{2} x(\sin \ln x - \cos \ln x) + c$$

<u>נגזרת לוגריתמית</u>

נניח כי נתונה $f(x)$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \begin{bmatrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c$$

<u>דוגמאות:</u>

א) $$\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx = \int \frac{(e^x+5)'}{e^x+5}\,dx = \ln(e^x+5) + c$$

ב) $$\int \frac{x+1}{x^2+2x+7}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+7)'}{x^2+2x+7} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+7| + c$$

ג) $$\int \frac{\tan x}{1}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

חדו"א - תרגול 2 (לב)

<u>תרגיל</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{bmatrix} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$= 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6(t - \arctan t) + c = 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan(\sqrt[6]{x})$$

<u>דוגמאות:</u>

א)

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \begin{bmatrix} t = \tan x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$$

$$= \left(\ln|\tan x|\right) + c$$

ב)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \begin{bmatrix} x = 2t \\ dx = 2dt \end{bmatrix} = \int \frac{2dt}{\sin 2t} = \int \frac{dt}{\sin t \cdot \cos t} \overset{\text{סעיף א'}}{=} \ln|\tan t| + c$$

$$= \left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) + c$$

<u>אינטגרלים של פונק' רציונליות</u>

פונק' רציונלית היא פונק' שהיא מנה של שני פולינומים. לדוגמא: $R(x) = \frac{x^2+5}{x^5-x+7}$

שלבים למציאת אינטגרלים של פונק' רציונלית:

נתונה $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ ⊛ אני תמיד רוצה להגיע למצב בו הדרגה של הפולינום העליון צריכה להיות קטנה מהפולינום התחתון. אחרת, ניתן לחלק את השבר לשברים עד שנגיע למצב המבוקש.

<u>שלב 1</u>: (להגיע למצב שהדרגה במונה יותר קטנה מהדרגה במכנה)

אם $\deg q \le \deg p$ אזי נחלק את P ב- q עם שארית.

$$P(x) = q(x)\cdot f(x) + g(x) + r(x)$$

$\deg r < \deg q$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{q(x)\cdot f(x) + r(x)}{q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

לכן,

$$\int R(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

שלב 2: אפשר להניח $\deg q > \deg p$

(*) במקרה כזה, קיימת טענה שלפיה ניתן לרשום כסכום של פונקציות אלמנטריות. כלומר,

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \sum_{\text{שברים אלמנטריים}}$$

שברים אלמנטריים הם מהצורות הבאות:

א $\frac{A}{x-a}$ ב $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k>1$ ג $\frac{mx+n}{x^2+px+q}$ $(\Delta<0)$ ד $\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$ $(\Delta<0)$

דוגמאות: (*) ו-(ב) דוגמאות כיצד אנו מקבלים את האינטגרל לאחר שהבענו אותו כסכום של שברים פשוטים.

א $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} = \begin{bmatrix} t=x-a \\ dt=dx \end{bmatrix} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t|+c = A\ln|x-a|+c$$

ב $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{bmatrix} t=x-a \\ dt=dx \end{bmatrix} = A\int t^{-k}\,dt = A\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$$

ג $$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = t^2+a^2$$

נסמן $t = x+\frac{p}{2}$, $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx = \begin{bmatrix} t=x+\frac{p}{2} \\ dt=dx \end{bmatrix} = \int \frac{m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n}{t^2+a^2}\,dt$$

$$= m\cdot\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{m}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int\frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}$$

(*) הבענו ב-2 אינטגרלים שאנו יודעים לחשב לפי טבלה א' ו-ב' (בהתאמה)

$$= \frac{m}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+c =$$

$$= \frac{m}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x-p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

נשים לב:

$$\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2}$$

ד $$\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{m}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

נחשב את שני האינטגרלים בנפרד:

I $$\int\frac{2t\cdot dt}{(t^2+a^2)^k} = \begin{bmatrix} s=t^2+a^2 \\ ds=2t\,dt \end{bmatrix} = \int\frac{ds}{s^k} = \frac{-1}{k-1}\cdot\frac{1}{s^{k-1}} = \frac{-1}{k-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+C$$

II $$I_k = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} \underset{\text{חישבנו כבר}}{\Longrightarrow} I_1 = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+c$$

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k} & du = -k\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} \\ v = t & dv = dt \end{bmatrix}$$

אינטגרציה בחלקים

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \int 2k\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int\left[\frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\right]dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} - 2ka^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \underbrace{\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}}_{= I_k}$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2k-1}{2k}I_k + \frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k}$$

לדוגמא!

$$(k=1)\quad I_2 = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_1 + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)} = \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}$$

דוגמאות:

1) $$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

דוגמא "לא פתירה":

$$\frac{x^4+8x+7}{x^{10}+7x^9+x-20}$$

* נשים לב שבשבר זה, המכנה קשה לפרק לגורמים. אבל בתיאוריה פירוק, תמיד אפשר לייצג את השבר כסכום של שברים אלמנטריים.

2) $$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{mx+n}{x^2+2x+5}$$

מעוניינו למצוא את A, m, n. נעשה מכנה משותף

$$= \frac{Ax^2+2Ax+5A+mx^2+nx-mx-n}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

$$A(x^2+2x+5) + (mx+n)(x-1) = x+2$$

נציב $x=1$:

$$8A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{8}$$

עכשיו אפשר להעביר את $A(x^2+2x+5)$ לצד השני, ולחלק ב- $x-1$ ולמצוא את m,n.
פתרון זה לא תמיד עובד.

$$x+2 = (A+m)x^2 + (2A+n-m)x + 5A-n$$

נשווה מקדמים ונקבל

$$\begin{cases} 0 = A+m \\ 1 = 2A+n-m \\ 2 = 5A-n \end{cases} \Rightarrow R(x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\,\frac{3x+1}{x^2+2x+5}$$

(3) $\dfrac{x^4}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$

פה מחלקים עם שארית

לא הספקנו אינטגרלים של פונ' טריגונומטריות. צריך ללכת לתרגול של פתן כדי להשלים.