5.5.08 (1)

חדו"א 2 - תרגול 1 (אולג)

אולג חסנוב.
טל 9696

<u>מיקום</u> בניין של דוקטורנטים
ליד ספריה של מדעים מדויקים חדר 3

<u>דואל:</u> oleg@post.tau.ac.il

תרגילי הבית בסוף של פרק. 70% חובת הגשה.

<u>פונקציה קדומה</u> (אינטגרל לא מסויים)

נגדיר $\{f:D\to R$ פ'$\} \to \{f:D\to R$ פונ' בעלות נגזרת כם$\}$

$$f \longrightarrow f'$$

<u>הגדרה:</u> תהי f פונק' המוגדרת על קרן מסויימת $D\subseteq\mathbb{R}$ (בד"כ קטע או איחוד של קטעים). פ' F המוגדרת על D וגזירה שם נקראת קדומה ל- f אם מתקיים $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in D$.

<u>סימון מקובל:</u> $F(x)=\int f(x)\,dx$

<u>משפט:</u> כל שתי פונק' קדומות לאותה פונקציה לאותה פונק' $f:I\to R$ (I-קטע) נבדלות בקבוע. כלומר אם F_1, F_2 קדומות ל- f אזי $F_1-F_2=C$.

<u>הוכחה:</u>
<u>למה:</u> אם $F:I\to R$ ו- $F'(x)=0$ אזי $F(x)=C$ (קבוע).

אם F_1 ו- F_2 קדומות ל $f(x)$ אז

$$(F_1-F_2)'=F_1'-F_2'=f-f=0$$

ולכן לפי הלמה $F_1-F_2=C$.

<u>הערה:</u> במקרה ש $f(x)$ מוגדרת על איחוד של כמה קטעים, שתי פונקציות קדומות נבדלות בפונקציה קבועה בכל קטע. (כלומר בכל קטע יש להם הבדל קבוע שאינו חייב להיות זהה בכל הקטעים).

<u>דוגמאות:</u> (1) $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f(x)=1$

אזי $F(x)=x+C$

(2) $f(x):[0,1]\cup(2,3]$ $f(x)=1$

אז

$$F(x)=\begin{cases} x+C_1 & x\in[0,1] \\ x+C_2 & x\in(2,3] \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,3] \end{cases} = f(x)$$

פונקציות אלמנטריות:

אלה פ' $\cos x$, $\sin x$, b^x, x^a, a,b (קבועים) וכל הפונקציות שמתקבלות מהן ע"י פעולות אריתמטיות הרגילות (כומר חיבור, חיסור...), הרכבה ולקיחת פונק' הפוכה

אוסף הפונ' האלמנטריות סגור ביחס ללקיחת הנגזרת, אך לא סגור ביחס למציאת פונק' קדומה.

למשל: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} - אפשר להוכיח כי הן בעלות פ' קדומות, אך אלו אינן פונקציות אלמנטריות

מבחינה טכנית "ההבדל" הוא שלא קיימת נוסחה "טובה" למכפלה, הרכבה של שני פ'.

הערה: כעת ניתן לחשב אינטגרלים לא מסוימים בעזרת תוכנות, למשל Maple

טבלת האינטגרלים הלא מסוימים: (מתוך טבלת הנגזרות):

$(e^x)' = e^x$

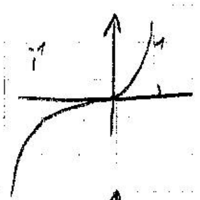
$(b^x)' = b^x \ln b \quad b>0,\ b \neq 1$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

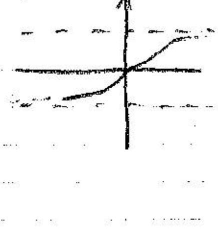
$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x}$



$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x>0$

$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

<u>נוסיף את הטבלה</u>

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \forall a \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$ (*) (כמעט נכון - בגלל 0 שני קטעים)

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \qquad b \neq 1 ,\ b > 0$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

<u>תכונות פשוטות של האינטגרל הלא מסוים</u>

① אם f,g פונ' ו- $F'=f$, $G'=g$ הקדומות המתאימות

אזי לכל $a,b \in \mathbb{R}$;

$$(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$$

$$\int (af + bg)\,dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx$$

<u>דוגמאות:</u>

I) $\int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{1}{x} dx$

$= x + \ln|x| + C$

(*) נשים לב שהטבלה שהפונקציה אינה מוגדרת ב-0 פשיטה לפעמים ושונות, בדרך כלל מתעלמים מזה טכנית.

II) $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \int \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{(x^2+1)}} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \int (x^2-1)dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \int x^2 dx - \int 1 \cdot dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$

② <u>הצבה לינארית</u> תהי f פונ' ו- F קדומה ($F' = f$)

אם $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ אזי

$$\frac{d}{dx}\left(F(ax+b)\right) = a\frac{F}{dx}(ax+b) = af(ax+b)$$

גזרתי את הפונקציה והכפלתי עם $ax+b$ כי זו כלל ההרכבה

הנגזרת של F היא f.

מכאן,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

<u>דוגמאות:</u>

① $\int \frac{dx}{3x+2} =$

נגדיר $f(x) = \frac{1}{x} \Leftarrow F(x) = \ln|x| + c$

$= \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$

(ב) $\int (2x-1)^2\,dx$

דרך I:

$= \int (4x^2-4x+1)\,dx = 4\int x^2 dx - 4\int x\,dx + \int dx$

$= \frac{4}{3}x^3 - 2x^3 + x + C$

<u>דרך II:</u> נגדיר $f(x)=x^2$ $\quad F(x)=\frac{x^3}{3}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^3}{3} + C$

(ג) $\int (2x-1)^{100}\,dx =$ במקרה של

דרך I תהיה מסורבלת, לעומת זאת אם נגדיר $f(x)=x^{100} \Leftarrow F(x)=\frac{x^{101}}{101}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{101}}{101} + C$

(ד) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1}$

נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+1} \Leftarrow F(x)=\arctan x$

$= \frac{1}{9}3\cdot\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$

(ה) $\int \frac{x^3\,dx}{x+1} = \int \left(\frac{x^3+1}{\cancel{x+1}}^{\cancel{(x+1)}\,(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int (x^2-x+1)\,dx - \int \frac{dx}{x+1}$

$\boxed{\text{נשתמש ב-(ב)} \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad F(x)=\ln|x|}$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

<u>נוסחאות שימושיות לאינטגרלים של פ' טריגונומטריות:</u>

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

דוגמאות:

① $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right)$$

$F(x)=\sin x \Leftarrow f(x)=\cos x$ נגדיר

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

② $$\int \sin^2 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,dx = \int dx - \int \cos^2 x\,dx = x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) + C$$

③ $$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C$$

אינטגרציה בחלקים:

השיטה היא תולדה של כלל הנגזרת של המכפלה.

$$(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$$

$$u\cdot v = \int (u\cdot v)'\,dx = \int (u'v + u\cdot v')\,dx = \int u'v\cdot dx + \int u\cdot v'\,dx$$

וקיבלנו,

$$\boxed{\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx}$$

דוגמה:

$$\int \ln|x|\,dx = \boxed{\begin{array}{c|c} V(x)=x & u(x)=\ln|x| \\ V'(x)=1 & u'(x)=\frac{1}{x} \end{array}} = x\ln|x| - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$= x\ln|x| - x + C$$

דוגמה:

$$\int x\cdot e^x\,dx = \boxed{\begin{array}{cc} V(x)=e^x & u(x)=x \\ V'(x)=e^x & u'(x)=1 \end{array}} = x\cdot e^x - \int e^x\cdot 1\,dx = xe^x - e^x + C$$

דוגמה:

$$\int \cos x\, e^x\,dx = \begin{bmatrix} V(x)=e^x & u(x)=\cos x \\ V'(x)=e^x & u'(x)=-\sin x \end{bmatrix} = e^x\cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$= e^x\cos x + \underbrace{\int e^x \sin x\cdot dx}_{\circledast} \circledast = \begin{bmatrix} V(x)=e^x & u(x)=\sin x \\ V'(x)=e^x & u'(x)=\cos x \end{bmatrix} = e^x\sin x - \int \cos x\cdot e^x\,dx$$

$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

מכאן,

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$