4.5.08 ①

חדו"א 2 - תרגול 1 (לב)

* יש חובת הגשה 70%.

התרגולים נמצאים באתר: www.math.tau.ac.il/~zapolsky

* לא יתקיים שיעור השלמה השבוע כנראה.

אינטגרל לא מסוים

אינטגרל לא מסוים הוא ההפך של הנגזרת, לדוגמה $(x^2)'=2x$

ולכן $\int 2x\,dx = x^2+c$

<u>הגדרה:</u> בהינתן פונקציה מוגדרת בקטע I, $f: I\to\mathbb{R}$, נאמר שפונקציה אחרת $F: I\to\mathbb{R}$ היא קדומה של f אם $\forall x\in I.\ F'(x)=f(x)$

<u>דוגמה:</u> א. x^2 היא פונקציה קדומה של $2x$.

ב. x^2+10 קדומה ל-$2x$.

<u>הגדרה:</u> אינטגרל לא מסוים של $f(x)$ זהו אוסף של כל הפונקציות הקדומות שלה.

<u>טענה:</u> נניח כי I קטע, $f: I\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח ל- $F_1, F_2: I\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות קדומות של f אז קיים קבוע c כך ש- $F_1(x)=F_2(x)+c$ לכל $x\in I$.

<u>הוכחה:</u> אם נגדיר $G(x)=F_1(x)-F_2(x)$ $\Leftarrow$ $G'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$

$\Leftarrow G=\text{const}$ (כלומר G קבועה).

<u>פונקציות אלמנטריות:</u> חזקות, אקספוננט, פונ' טריגונומטריות, פונקציות רציונליות והרכבות שלהן ביחד עם פעולות חשבון

<u>לדוגמא:</u> הפונקציה $[\ln(e^x+\sin(x^2))]^5$ היא <u>פונקציה אלמנטרית</u>.

לעומת זאת, הפונקציה $[x]$ אינה אלמנטרית.

<u>פונקציה לא אלמנטרית:</u> הפונקציה $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)!}$ (כנראה) לא אלמנטרית. ⇐ לא הוכח

⊛ כל נגזרת של פונקציה אלמנטרית היא פונקציה אלמנטרית אבל באינטגרל זה לא המצב.

לדוג' $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int e^{-x^2}dx$,

נזכר בנגזרות של פונק' אלמנטריות:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (b^x)' = b^x \cdot \ln b$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x^a)' = a x^{a-1}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = \sin x$$

מסקנה: $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, $a \neq -1$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\,(|x|')$$

$\underline{x > 0}:\ \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$

$\underline{x < 0}:\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

$$\int dx = x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c \quad b \neq 1,\ b > 0 \qquad \int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

הערה (תרגיל) האינטגרל הוא לינארי, כלומר לכל פונקציה f,g וקבועים a,b מתקיים:

$$\int af(x) + bg(x)\,dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)\,dx$$

עבור x^a:

$$(x^{a+1})' = (a+1)\,x^a \iff \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a$$

חדו"א 2 - תרגול 1 (כן)

תרגיל חשבו: $\int \frac{x+1}{x}\,dx$, $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

פתרון:

$$\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = (x+\ln|x|)+c$$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int (x^2-1) + \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

הערה: עבור $a \neq -1$; $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ $\qquad$ $\int x^{-1} = (\ln|x|)+c$

הצבה לינארית:

נניח כי F קדומה ל-f , $F'(x)=f(x)$,

אז לכל a,b , $(F(ax+b))' = a\cdot f(ax+b)$

מסקנה:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

תרגיל: חשבו:

$\int \frac{1}{3x+2}\,dx$, $\int (2x-1)^2\,dx$, $\int (2x-1)^{100}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$, $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$

פתרון:

א) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x}$ אז,

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \int f(3x+2)\,dx$$

ומכיוון $F'(x)=\frac{1}{x}$ עבור $F(x)=\ln|x|$ אז:

$$= \frac{1}{3}F(3x+2)+c = \frac{1}{3}\ln|3x+2|+c$$

$$\int (2x-1)^2\,dx = \int 4x^2-4x+1\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$$

פתרון ע"י הצבה לינארית: נסמן $f(x)=x^2$ אז $F'(x)=f(x)$ עבור $F(x)=\frac{x^3}{3}$

$$\int (2x-1)^2\,dx = \int f(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}F(2x-1)+c = \frac{1}{6}(2x-1)^3+c$$

4.5.08 (4)

חדו״א 2 - תרגול 1 (ב)

בדיוק כמו האינטגרל הקודם:

$$\int (2x-1)^{100}\,dx = \frac{(2x-1)^{101}}{202} + C$$

אינטגרל הבא: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\frac{1}{x^2+9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1} = \frac{1}{9}\cdot f(\tfrac{x}{3})$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int f(\tfrac{x}{3})\,dx = \frac{1}{9}\left(3F(\tfrac{x}{3})\right) = \frac{1}{3}\arctan(\tfrac{x}{3}) + C$$

(סימנו $F(x)=\arctan x$).

<u>אינטגרל הבא:</u>

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int \frac{x^3+1-1}{x+1}\,dx = \int x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + C$$

<u>ספרים מומלצים:</u> מיצלר, Fichtegoltz (פיכטנגולץ), Demdovich - ספר עם תרגילים.
בן דוד, קין.

שימושים בזהויות טריגונומטריות לחישובי אינטגרלים

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

<u>תרגיל:</u>

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int 1 - \cos^2 x\,dx = x - \int \cos^2 x\,dx = x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

<u>הערה:</u>

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

<u>חשבו</u>

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c$$

<u>אינטגרציה בחלקים</u> (לדעתי זו השיטה הכי יעילה שפוגשים בה הכי הרבה)

נתבונן בביטוי הבא: $(u\cdot v)' = u'v + v\cdot u'$

כאשר u ו- v הן פונקציות גזירות.

$$\Rightarrow \int \left(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\, v'(x)\right) dx = u(x)\cdot v(x) + c$$

נוסחת אינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int u' v\, dx = u\cdot v - \int u\cdot v'\, dx}$$

<u>תרגיל:</u> לחשב את $\int (\ln|x|)dx$

<u>פתרון:</u>

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(|x|)}_{v}\, dx \qquad u(x)=x$$

נגדיר $u(x)=x \quad v(x)=\ln|x|$

$$\int \ln|x|\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx = x\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\ln|x| - \int 1\, dx = x\ln|x| - x + c$$

<u>תרגיל</u>

<u>חשבו</u> $\int x\cdot e^x\, dx \qquad \int (\sin x)e^x\, dx$

<u>פתרון:</u>

$$\int x e^x\, dx \underset{\substack{u(x)=e^x \\ v(x)=x}}{=} \int (e^x)'\cdot x\cdot dx = e^x\cdot x - \int e^x\, dx = e^x\cdot x - e^x + c$$

$$\int \underset{v}{x^2}\, \underset{u'}{e^x}\, dx = e^x\cdot x^2 - \int e^x\, 2x\, dx = e^x\cdot x^2 - 2\int e^x\cdot x\, dx$$

$$= e^x\cdot x^2 - 2(e^x\cdot x - e^x + c) = e^x\,(x^2 - 2x + 2) + C$$

4.5.08 (6)

מדו"א 2 - תרגול 1 (לב)

$$\int \sin x \cdot e^x \cdot dx =$$

ננסה לעשות אינטגרציה בחלקים ונראה שלא ניתן להגיע לתשובה: הגענו לתוצאה מעניינת שקיבלנו ב sin.

$$u(x) = -\cos x \quad , \quad v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow -\cos x\, e^x - \int (-\cos x)\, e^x\, dx = (-\cos x)\, e^x + \int \cos x \cdot e^x\, dx$$

$$= \boxed{\begin{matrix} u = \sin x \\ v = e^x \end{matrix}} = -(\cos x)\, e^x + (\sin x)\, e^x - \int (\sin x \cdot e^x)\, dx$$

קיבלנו ביטוי של האינטגרל באמצעות עצמו. לכן נסמן $F(x) = \int (\sin x) \cdot e^x\, dx$ אזי

$$F(x) = -e^x \cos x + e^x \cdot \sin x - F(x)$$

$$2F(x) = e^x (\sin x - \cos x) + c \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

<u>שימוש באינדוקציה ואינטגרציה בחלקים</u>

נתבונן ב

$$I_m(x) \overset{\text{סימון}}{=} \int x^m \cdot e^x\, dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$I_m(x) = \int e^x \cdot x^m\, dx = \boxed{\begin{matrix} u(x) = e^x \\ v(x) = x^m \end{matrix}} = e^x x^m - \int e^x \cdot m x^{m-1}\, dx$$

$$= e^x \cdot x^m - m I_{m-1}(x)$$

קיבלנו נוסחה רקורסיבית. דוגמת שימוש:

$$I_3(x) = e^x \cdot x^3 - 3I_2(x) = e^x \cdot x^3 - 3(e^x \cdot x^2 - 2I_1(x)) = e^x \cdot x^3 - 3e^x x^2 + 6I_1(x)$$

$$= e^x x^3 - 3e^x x^2 + 6(e^x \cdot x - e^x) + c = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

$$I_0(x) = \int e^x dx = e^x + c$$

$$I_m(x) = e^m (x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - \dots \pm m!) + c$$

<u>תרגיל:</u> מצא נוסחת נסיגה עבור

$$I_m(x) = \int \sin^m x\, dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

<u>פתרון:</u>

$$I_m(x) = \int \sin^m x\, dx = \left[\begin{matrix} u(x) = \sin^{m-1} x \\ u'(x) = (m-1)\sin^{m-2} \cos x \end{matrix} \middle| \begin{matrix} v(x) = -\cos x \\ v'(x) = \sin x \end{matrix}\right]$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x - \int (m-1) \sin^{m-2} x \cos x\, (-\cos x)\, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \cdot \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$= -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)\int \sin^{m-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m = I_m$$

$$\Rightarrow mI_m = -\sin^{m-1}x\cos x + (m-1)I_{m-2} \Rightarrow I_m = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

אומד על שיטת ההצבה.