פונקציות רציפות (נקודות הרציפות)

<u>הגדרה</u>: יהי $X\subset\mathbb{R}^n$ ו- $x_0\in L(X)\cap X$, $f: X\to\mathbb{R}^m$

אזי f נקראת רציפה ב- x_0 אם $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$

(לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך שלכל $x\in X$ שמקיים $\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}<\delta$ מתקיים $\|f(x)-f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon$)

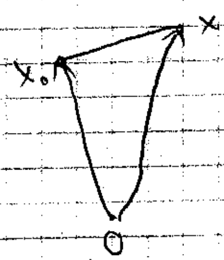
(ההגדרה זהה לרציפות של פונ' ממשתנה אחד רק שכאן המרחק הוא הנורמה (לא ערך מוחלט))

<u>הערה</u>: f נקראת רציפה ב- X אם היא רציפה לכל x כנ"ל.

<u>דוגמאות</u>

1. $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ - נורמה אוקלידית

<u>הוכחה</u>: נבחר כך x_0 (לכן צריך כאן $X=\mathbb{R}^n$ ו- $L(X)=\mathbb{R}^n$
משהו). צריך להראות שאם ניקח x מספיק קרוב ל- x_0 אז הנורמה של x מספיק קרובה לנורמה של x_0.



(אי שוויון המשולש) $\|x\|\le\|x_0\|+\|x-x_0\|$

$\|x_0\|\le\|x\|+\|x-x_0\|$

$-\|x-x_0\|\le\|x\|-\|x_0\|\le\|x-x_0\|$

$\big|\|x\|-\|x_0\|\big|\le\|x-x_0\|$

בהינתן ε נבחר את $\delta=\varepsilon$. ☒

<u>הערה</u>: כללי האריתמטיקה של פ' רציפות תקפים (בדיוק כמו במקרה של פונקציה של משתנה אחד)

2. <u>תרגיל</u>: לבדוק רציפות של הפונ' $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ שנתונה ע"י:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(<u>תזכורת</u>: בדקנו כי $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\to x$ רציפה וגם $y:(x,y)\to y$)

לכן לפי כללי האריתמטיקה $f(x,y)$ רציפה עבור $(x,y)\ne(0,0)$

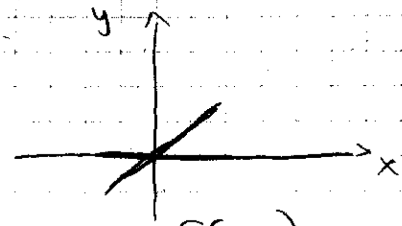
(מנק' $(0,0)$ המכנה מתאפס ובשאר הנק' זה פשוט סכום/מנה של x ו- y שהן רציפות)

בנקודה (0,0) אין גבול

(0 בקבוע)

$\lim_{x\to0} f(x,0)=0$

$\lim_{t\to0} f(t,t)=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}$



לכן $f(x,y)$ לא רציפה ב-$(0,0)$.

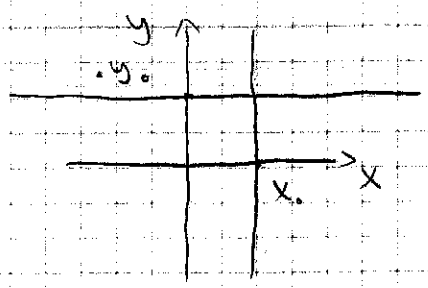
(באופן כללי) ניתן להבין את כשמתקרבים מכיוונים שונים את הגבולות שונים ואז הפונ' לא רציפה (פונ' של שני משתנים)

הערה 1: לפעמים כדאי לרשום את $f(x,y)$ בקואורדינטות פולאריות, כלומר: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

למשל בתרגיל שלנו $f(r,\theta)=\frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$

קיבלנו משהו שלא תלוי ב-r, לכן אם נקבע את θ הערך יהיה קבוע. לכן ניתן לראות מפה שהפונ' לא רציפה ב-$(0,0)$

הערה 2:



$f(\cdot,y_0)$ - פונ' רציפה של x לכל y_0

$f(x_0,\cdot)$ - פונ' רציפה של y לכל x_0

אך $f(x,y)$ לא פונ' רציפה!

הסבר: נניח $y_0\neq0$ אזי נקבל

$f(x,y_0)=\frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ — זוהי פונ' רציפה.

אם $y=0$ אזי

$$f(x,0)=\begin{cases}0 & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}\equiv 0$$

זוהי פונ' זהותית 0, כלומר רציפה

אותו דבר עבור $f(x_0,\cdot)$

(לכן זה לא מספיק כדי להגיד שהפונ' של שני משתנים רציפה)

תרגיל: לבדוק רציפות של

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון: אם $(x,y)\neq(0,0)$ f רציפה (כמו קודם)

ב-$(0,0)$: נרשום את $f(x,y)$ בקואורדינטות (r,θ)

$f(r,\theta)=\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2}=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$ $\quad |r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\le 2r$ (כי $\cos^3\theta,\sin^3\theta\le1$)

לכן f רציפה גם ב-$(0,0)$. $\Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|\le 2\underbrace{\|(x,y)-(0,0)\|}$

לכן f רציפה בכל $\mathbb{R}^2$

<u>דוגמא</u> לפונ' בעלת גבול בכל כיוון אבל עדיין לא רציפה:

(לכן אי אפשר להסיק מכך שהפונ' רציפה)

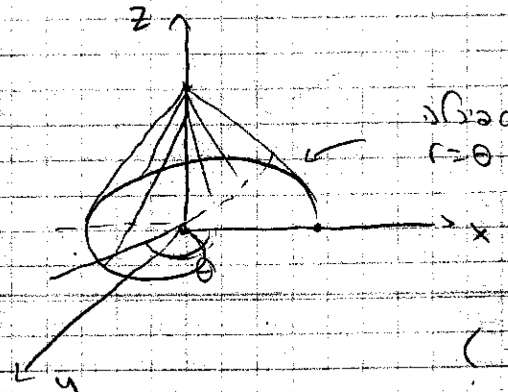
נסתכל על $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(r,\theta)=1-\frac{r}{\theta}$ $0\le\theta\le 2\pi$

<u>תרגיל</u>: תרשמו את (r,θ) בדיוק משתני (x,y).

$$\begin{pmatrix} y=r\sin\theta, & x=r\cos\theta \\ r=\sqrt{x^2+y^2} & \theta=\arctan\left|\frac{y}{x}\right| \end{pmatrix}$$

(שימו לב כי $f(r,\theta)$ מוגדרת היטב לכל r,θ)

הפונ' מתאפסת כאשר $r=\theta$



(פונקציה אפינית = פונקציה לינארית ועוד קבוע)

אם נסתכל על f לאורך קו ישר בכיוון θ: $\lim f=1$.

כלומר גבול על כל קו ישר קיים ושווה לערך הפונ'.

לעומת זאת, אם נתקרב ל-$(0,0)$ לאורך הספירלה $r=\theta$:

$f(r,r)\equiv 0$ ולכן נקבל $\lim f=0$ לכן f לא רציפה ב-$(0,0)$.

<u>נגזרות חלקיות</u>

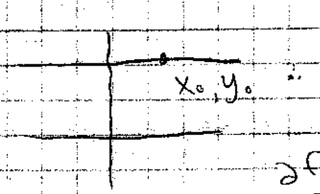
יהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

הנגזרת החלקית של f לפי x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=\frac{d}{dx_i}f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)\Big|_{x_i=x_i^0}$$

<u>תרגיל</u>: לחשב את הנגזרות החלקיות בדוגמא הקודמת:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



(דוגמא: עבור פונ' של שני משתנים

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

<u>פתרון</u>: עבור $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=\frac{d}{dx}\left(\frac{xy_0}{x^2+y_0^2}\right)\Big|_{x=x_0}=\frac{y_0(x^2+y_0^2)-xy_0\cdot 2x}{(x^2+y_0^2)^2}\Big|_{x=x_0}=$$

$$=\frac{y_0(y_0^2-x^2)}{(x^2+y_0^2)^2}\Big|_{x=x_0}=\frac{y_0(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{x_0 y}{x_0^2+y^2}\right)\Big|_{y=y_0} = \frac{x_0(x_0^2-y_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

ב-$(0,0)$: (למרות שהפונ' לא רציפה, יש לבדוק את הגזירה בהצטמצמות אותה לציר x או לציר y)

$f(x,0)\equiv 0$ (לפי הגדרת f) $\Leftarrow$ $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$

$f(0,y)\equiv 0$ $\Leftarrow$ $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$

כלומר בסך הכל קיבלנו:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

<u>אי-שוויון איזופרימטרי</u> (תיקון להוכחה משיעור שעבר)

יהי $\gamma(t)\in\mathbb{R}^2$ עקומה חלקה, סגורה בלי חיתוכים עצמיים שסוגרת את תחום D. אזי $S_D \le \frac{L_\gamma^2}{4\pi}$ כאשר

S_D - שטח של D, L_γ - אורך של γ

ושוויון מתקיים אמ"ם $\gamma(t)$ - מעגל

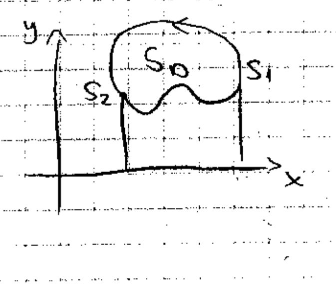
<u>הוכחה</u>: יהי $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ $0\le t\le 1$

$$L=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

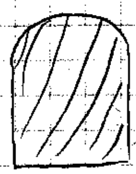
תמיד ניתן לבחור את פרמטר s כך ש-$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1$

(תרגיל: בהינתן t כלשהו נבחר את הפרמטר הבא:

$$s=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad)$$



נוסחה לשטח:

$S_D =$  $-$ 

$$\int y\,dx \qquad \int y\,dx = \int y(s)\dot{x}(s)\,ds$$

$$\int_{s_2}^{s_1} y(s)\,dx(s) - \int_{s_2}^{s_1} y(s)\dot{x}(s)\,ds = -\int_0^1 y(s)\dot{x}(s)\,ds$$

באותו אופן אם נסתכל על ההטלה על ציר y:

$$S_D=\int_0^1 x(s)\dot{y}(s)\,ds \Rightarrow S_D=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x(s)\dot{y}(s)-y(s)\dot{x}(s)\right)ds=$$

$= \frac{1}{2} \left| \langle x, y \rangle - \overline{\langle y, x \rangle} \right| \circledast$

$\langle x,y\rangle = \sum \hat{\dot{x}}(n) \overline{\hat{\dot{y}}(n)}$

(חדו"א 2 - תרגול) ⑤ 7.7.08

(x - נגזרת של x לפי s)

$\dot{x} = \frac{dx}{ds}$

$\widehat{\dot{x}}(n) = 2\pi i n \hat{x}(n)$

$\widehat{\dot{y}}(n) = 2\pi i n \hat{y}(n)$

$$\circledast \frac{1}{2} \left| \sum 2\pi i n \left(\overline{\hat{y}(n)}\, \hat{x}(n) - \overline{\hat{x}(n)}\, \hat{y}(n) \right) \right| = \pi \sum |n| \left| \hat{y}(n) \overline{\hat{x}(n)} - \hat{x}(n) \overline{\hat{y}(n)} \right| \le$$

נשתמש ב- $|a\bar{b} - b\bar{a}| \le 2|a||b| \le |a|^2 + |b|^2$

$$\le \frac{\pi}{4\pi^2} \sum_n 4\pi^2 |n| \left(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2 \right) \le \pi \sum_n |n|^2 \left(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \left(|2\pi i n\, \hat{x}(n)|^2 + |2\pi i n\, \hat{y}(n)|^2 \right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \Bigg[\underbrace{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}_{=1} \Bigg] ds =$$

לפי בחירת s שלנו

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds = \frac{1}{4\pi}$$

$L = \int_0^1 ds = 1$

[illegible]-שוויון

<u>תרגיל</u>: בדקו שהשוויון מתקיים אמ"מ $\gamma(t)$ - מעגל.