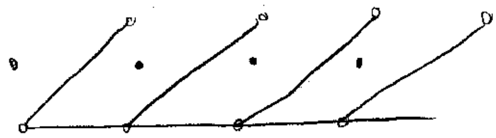
הרצאה 2 - תרגול

שבוע שעבר הוכחנו $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x-n < 1 \\ \frac{1}{2} & x = n \end{cases}$



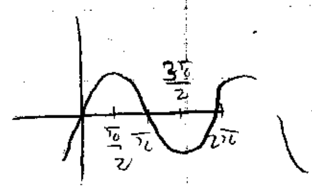
$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n x \quad (*)$$

$$f(n) = \frac{f(n-0)+f(n+0)}{2} \qquad \left(f(x-0) := \lim_{x \to x^-} f(x) \right.$$:סימון)

מסקנה 1: נסתכל על $(*)$ עבור $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$



תרגיל: תהי $f(x) \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ותהי $g(x) = f(x-a)$

הוכיחו $\hat{g}(n) = e^{-2\pi i n a} \hat{f}(n)$ (פיתוח פוריה של פונ' מוזזת)

פתרון: "פורמלי"

$$f(x) = \sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$g(x) = f(x-a) = \sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n (x-a)} = \sum \underbrace{\hat{f}(n) e^{-2\pi i n a}}_{= \hat{g}(n)} e^{2\pi i n x}$$

(לפי יחידות של טור פוריה)

(זו לא הוכחה כי הנחנו שטור פוריה מתכנס לפונ')

הוכחה:

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 f(x-a) e^{-2\pi i n x} dx =$$

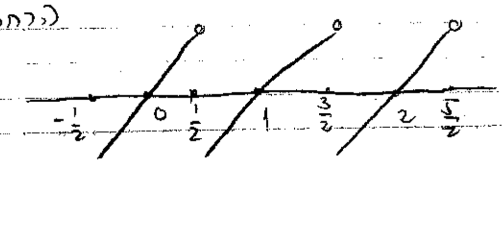
$$= \{t = x-a\} = \int_{-a}^{1-a} \underbrace{f(t) e^{-2\pi i n (t+a)}}_{\text{מחזורית עם מחזור 1}} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n a} e^{-2\pi i n t} dt =$$

$$= e^{-2\pi i n a} \underbrace{\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t}}_{\hat{f}(n)}$$

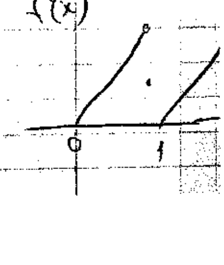
(הוכחנו בלי שום הנחה על התכנסות)

מסקנה 1: פיתוח פוריה של

$$g(x) = \underbrace{\begin{cases} x & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & x = \frac{1}{2} \end{cases}}_{\text{הרחבה מחזורית}}$$



הפונ' המקורית $f(x)$



30.6.08

(2) $g(x) = f(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$

טור פורייה של $g(x)$:

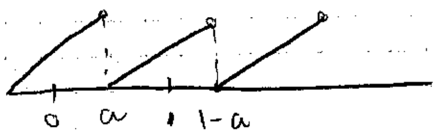
$$\frac{1}{2} - \sum \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x - \pi n) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

<u>מסקנה 2</u>: פיתוח פורייה של

$$\underbrace{f_a(x) = \begin{cases} x+1-a & 0<x<a \\ x-a & a<x<1 \end{cases}}_{\text{המשכה מחזורית}}$$

$f_a(x) = f(x-a)$ (הזזה ב-a של הפונ' הקודמת)



$$f_a(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n(x-a)$$

$$\sin(2\pi n x - 2\pi n a) = (\sin 2\pi n x)\cos(2\pi n a) - (\cos 2\pi n x)\sin(2\pi n a)$$

$$\Rightarrow f_a(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n a)}{\pi n} \sin(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n a)}{\pi n} \cos(2\pi n x)$$

<u>הערה חשובה</u>: טור פורייה של $f_a(x)$ מקיים:

$$\sum \hat{f_a}(n) e^{2\pi i n x} \longrightarrow \frac{f(a-0)+f(a+0)}{2}$$

<u>טענה</u>: תהי $f(x)$ פונ' מחזורית עם מחזור 1, רציפה למקוטעין ובעלת נק' אי-רציפות מסוג I בלבד, אזי:

$$S_n f(n) \longrightarrow \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

קירוב פורייה מסדר n

לכל x

<u>הוכחה</u>: יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ נק' אי-רציפות של $f(x)$.

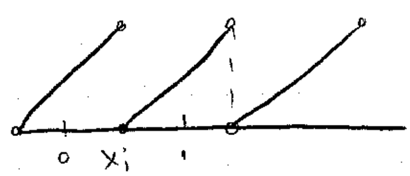
יהי $d_{x_i} = f(x_i+0) - f(x_i-0)$

$$f(x) = \sum d_{x_i} f_{x_i}(x) + \underbrace{\left(f(x) - \sum_{i=1}^{n} d_{x_i} f_{x_i}(x)\right)}_{\text{זאת פונ' רציפה}}$$

פונקציות מהתרגיל הקודם (הזזה ב-i)

וגם בעלת נגזרות

זה - [illegible]! ולכן זאת פונ' Lipshitz



20.6.08

(3)

לכן הטור פורייה של מתכנס אליה.

$$S_n f_{x_i}(x) \longrightarrow \frac{f_{x_i}(x+0)+f_{x_i}(x-0)}{2}$$

$$S_n\left(d_{x_i} f_{x_i}(x)\right) \longrightarrow \frac{d_{x_i} f_{x_i}(x+0)+d_{x_2} f_{x_2}(x-0)}{2} \quad \Leftarrow \text{מתרגיל הקודם}$$

$$S_n F(x) \longrightarrow F(x) = \frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$$

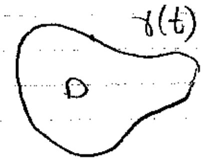
כי $F(x)$ Lipshitz לכן

$$S_n f(x) \longrightarrow \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

$\boxtimes$

<u>משפט - שוויון איזופרימטרי</u>

תהי $\gamma(t)\in\mathbb{R}^2$ $0\le t\le 1$ עקומה רציפה סגורה $\gamma(0)=\gamma(1)$ בלי חיתוך עצמי והיא סוגרת תחום D.



אז $\frac{L^2}{4\pi}\ge S$

כאשר L - אורך עקומה γ

S - שטח של התחום D

יתרה מזאת, השוויון מתקבל אמ"מ $\gamma(t)$ - מעגל.

<u>הסבר</u>: אני נוסחה את העקומה מהצורה $\gamma(t)=\left(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\right)$

$0\le\theta\le 2\pi$

$$L_\gamma=\int_0^{2\pi} r(\theta)\,d\theta \longleftarrow \text{(תרגיל: להוכיח בעל!)}$$

לפי הנוסחה של אורך עקומה

$$S_D=\int_0^{2\pi}\frac{r^2(\theta)}{2}\,d\theta$$

שטח של התחום $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid r=\sqrt{x^2+y^2}\le r(\theta)\}$.

<u>הוכחה</u> של אי-השוויון האיזופרימטרי:

$r(\theta)\in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (מחזורית עם מחזור 2π)

נסמן את משתנה חדש $t=\frac{\theta}{2\pi}$ ואז

$$L_\gamma=2\pi\int_0^1 r(t)\,dt$$

$$S_D=\pi\int_0^1 r^2(t)\,dt$$

לכן $r(t)\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$L_\gamma=2\pi\,\hat{r}(0)$$

$$S_D=\pi\|r(t)\|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{r}(n)|^2$$

מכאן

$$\frac{L^2}{4\pi}=\pi\,\hat{r}(0)^2\le\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{r}(n)|^2=S_D$$

30.6.08 חדו"א 2
תרגיל

4 הוכחנו את המשפט לתחומים מהצורה $\gamma(\theta)=(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$

G מצא אחר מעתקים ע"י הארגומנט שבציור למקרה הנ"ל