22.6.2008

טורי Fourier

מרחב הפונקציות: $f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ $\qquad \langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$

מקדמי Fourier:

$$\hat{f}(n)=\langle f,e^{2\pi inx}\rangle=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$$

$$S_N f=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

תכונות:

① f ליפשיץ: $|f(x)-f(y)|<M|x-y|$ אז $S_Nf\rightrightarrows f$

② $f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ $\qquad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_nf\rightrightarrows f$

③ $f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ $\qquad \|f\|^2=\langle f,f\rangle=\int_0^1|f|^2\,dx\underset{\text{(Parseval)}}{=}\sum_n|\hat{f}(n)|^2$ $\qquad (\|S_nf-f\|)\to 0$

תרגיל: תהי $f(x)\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $f'(x)$ קיימת ורציפה למקוטעין. הוכח $\hat{f'}(n)=2\pi in\hat{f}(n)$

פתרון: (הערה: נכתוב באופן פורמלי $f(x)\sim\sum_n\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$

$$\Rightarrow f'(x)\sim\sum_n\hat{f}(n)\left(e^{2\pi inx}\right)'=\sum_n\left[\hat{f}(n)2\pi in\right]e^{2\pi inx}\Big)$$

$$\hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx=\int_0^1\frac{f(x)}{-2\pi in}\,d\left(e^{-2\pi inx}\right)=\frac{f(x)e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\Big|_0^1-$$

עבור $n\neq 0$

$$-\frac{1}{-2\pi in}\int_0^1 e^{-2\pi inx}f'(x)\,dx=\frac{1}{2\pi in}\hat{f'}(n)$$

עבור $n=0$:

נניח x_i נק' אי רציפות של $f'(x)$, $1\le i\le n$

$$\hat{f'}(0)=\int_0^1 f'(x)\,dx=$$

$$\int_0^{x_1}f'(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\,dx+\dots+\int_{x_n}^{1}f'(x)\,dx\underset{\text{Newton-Leibnitz}}{=}\left(f(x_1)-f(0)\right)+\left(f(x_2)-f(x_1)\right)+\dots$$

$$+\left(f(1)-f(x_n)\right)=f(1)-f(0)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{f'}(n)=2\pi in\hat{f}(n)\Big|_0\ \text{לכל } n}$$

4) **תרגיל:** להוכיח את אי השוויון Wirtinger:

יהי $f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\int_0^1 f(x)dx=0$ אז,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dy$$

פתרון:

$$\hat f(0)=\int_0^1 f(x)dx=0$$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_n |\hat f(n)|^2 = \sum_{n\neq 0}|\hat f(n)|^2 = \sum_{n\neq 0}\frac{|\hat{f'}(n)|}{(2\pi n)^2} \le$$

$n\ge 1$

$$\le \sum_{n\neq 0}\frac{|\hat{f'}(n)|^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\neq 0}|\hat{f'}(n)|^2 \le \frac{1}{4\pi^2}\sum_n |\hat{f'}(n)|^2 \underset{\text{Parseval}}{=}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

5) **תרגיל:** לחשב טור Fourier את $f(x)=x \quad 0<x<1$

ולבדוק התכנסות.

פתרון: מקדמי Fourier

$$\hat f(n)=\int_0^1 xe^{-2\pi i n x}dx = \int_0^1 \frac{x\,d(e^{-2\pi i n x})}{-2\pi i n}=$$

$$=\frac{xe^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 e^{-2\pi i n x}dx = -\frac{1}{2\pi i n}(1-0) = \boxed{\frac{i}{2\pi n}}$$

$$\hat f(0)=\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

טור Fourier:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{i}{2\pi n}e^{2\pi i n x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{i}{2\pi n}e^{-2\pi i n x} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{-1}{\pi n}\cdot\frac{e^{2\pi i n x}-e^{-2\pi i n x}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}$$

הערה: אם $f(x)$ מקבלת רק ערכים ממשיים אז $\hat f(n)=\overline{\hat f(-n)}$

לפי מבחן Dirichlet ($\sum \sin 2\pi nx < M$) וגם ($\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ מונוטונית יורדת)

$\sum f_n$ מתכנסת במ"ש