19.6.2008

הגדרה: יהיו $f(x), g(x) \in C(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ (פונקציות עם ערכים מרוכבים ועם מחזור 1).
מגדירים
$$f*g(x) = \int_0^1 f(t)\, g(x-t)\, dt$$

תרגיל: תוכיחו כי עבור $f(x), g(x)$ כנ"ל, $f*g(x)$ פונ' רציפה.

פתרון: נזכיר את הלמה: תהי $f(x)$ פונ' רציפה בקטע $[0,1]$ אזי לכל ε קיים δ כך שלכל $|t|<\delta$, $|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$ (התכונה נובעת מרציפות במ"ש).
(תוצאה של למה של היינה בורל).

נחזור לפתרון: בהינתן ε נבחר δ כך ש $|g(x+t_0)-g(x)|<\varepsilon$ לכל $|t|<\delta$

$$|f*g(x+t_0) - f*g(x)| = \left|\int_0^1 f(t)\, g(x+t_0-t)\,dt - \int_0^1 f(t)\, g(x-t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 f(t)\big(g(x+t_0-t) - g(x-t)\big)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,\underbrace{|g(x+t_0-t)-g(x-t)|}_{\le\,\varepsilon}\,dt \le$$

בגלל ש-g רציפה בקטע סגור

$$\le \varepsilon \int_0^1 \underbrace{|f(t)|}\,dt \le \varepsilon M$$

$f(x)$ רציפה ולכן $|f(t)|$ חסומה

תרגיל: להוכיח כי
$$1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos 2\pi k t = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}$$

פתרון: נשתמש במספרים מרוכבים $\cos\alpha = Re(e^{i\alpha})$

נסתכל על הפונקציה $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ אז עבור $|z|<1$:

$$f(z) = (1+z)\cdot\frac{1}{1+z} = (1+z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

נסתכל על החלק הממשי

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = Re\left(\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-\bar z}{1-\bar z}\right) = Re\left(\frac{(1+z)(1-\bar z)}{|1-z|^2}\right) = \frac{1}{|1-z|}Re\big((1+z)(1-\bar z)\big)$$

$z = re^{2\pi i t}$
$\bar z = re^{-2\pi i t}$

$$|1-z|^2 = (1-z)(1+\bar z) = (1-re^{2\pi i t})(1+re^{-2\pi i t}) = 1+2r\cos 2\pi t + r^2$$

$$Re\big[(1+z)(1-\bar z)\big] = 1-r^2$$

$$Re\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(2\pi t)$$