16.6.2008 ①

טורי חזקות ופיתוח טיילור

<u>יחידות של פיתוח טיילור</u>: אם נתון כי $f(x)=\sum a_n x^n$ ($|x|<a$, $a\neq 0$) אז $\sum a_n x^n$ - הינו טור טיילור של $f(x)$. כלומר, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

(אותו דבר לגבי פיתוח טיילור מסביב לכל נק' $x=b$)

<u>תרגיל</u>: למצוא פיתוח טיילור של:

(א) $f(x)=\log\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(ב) $f(x)=\frac{x}{(1-x)(1+x^2)}$

<u>פתרון</u>:

(א) $f(x)=\log(1-x^2)-\log(1+x^2)$. $(t=x^2)$

$$\log(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$$ (הוכחנו בתרגול הקודם)

$$\log(1-t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$$ לכל $|t|<1$. נציב בטור הקודם $(-t)$ במקום (t).

נקודתית.

זהו טור טיילור של $\log(1+t)$ מהיחידות של טור טיילור.

⇐ מציבים $x^2=t$: $|x|^2=|x^2|=|t|<1 \iff |x|<1$:

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-1-(-1)^{n-1}}{n}\right]x^{2n}=$$

בגלל שכל הטורים מתכנסים במ"ש אז גם החיבור מתכנס במ"ש.

$$=\sum_{n\text{ אי-זוגי}}\frac{(-2)x^{2n}}{n}\overset{(n=2k+1)}{=}-2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{2k+1}\right)$$

(ב) $f(x)$ - פ' רציונלית ולכן ניתנת לפירוק לסכום של שברים פשוטים:

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+x}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x}\right). \qquad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \longrightarrow |x|<1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$ מכיוון שבכל קטע $|x|\le 1-\varepsilon$ הטור מתכנס במ"ש ביחד עם <u>כל</u> הנגזרות שלו.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = (1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\overbrace{1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n}^{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4}(2n+1-(-1)^n)\right]x^n}$$

(*) <u>תוספת:</u> נחשב את רדיוס התכ' לטורים בשני התרגילים:

(א) $$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{2k+1} \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} \overset{\lim\sup}{=} \lim_{k\to\infty}\sqrt[4k+2]{\frac{1}{2k+1}} = \boxed{1}$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \neq 4k+2 \\ \frac{1}{2k+1}, & n = 4k+2 \end{cases}$$

(ב) $$1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4}2n} \le \frac{1}{R} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4}(2n+2)} = 1, \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

<u>תרגיל:</u> הראו כי רדיוס התכ' של $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ הוא 1, כאשר:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(בתרגול בית צ"ל כי זהו פיתוח טור טיילור של $(1+x)^{\alpha}$)

<u>פתרון:</u> נקבע את x ונבדוק את התכ' הטור $\sum \overbrace{\binom{\alpha}{n}x^n}^{a_n}$ לפי מבחן D'Alambert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right| = |x|$$

לופיטל $\frac{\infty}{\infty}$

אם $|x|<1$ הטור מתכנס

$|x|>1$ הטור מתבדר

$$\boxed{R=1}$$

פונקציות מחזוריות

תזכורת: $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת מחזורית עם מחזור T אם לכל x מתקיים $f(x+T)=f(x)$.

דוגמאות: $\sin x$, $\cos x$ - מחזוריות עם מחזור 2π.

$f(x)=c$ - מחזורית עם כל מחזור.

טענה: תהי $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ומחזורית, $f(x)\neq const$ אזי קיים מחזור הכי קטן T.

פתרון: נניח בשלילה, כלומר, נניח שקיימים מחזורים $T_1>T_2>\cdots$, $T_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ונוכיח כי נקבל סתירה.

$f(x)$ פונקציה רציפה, בפרט בנק' 0, ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך ש $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$

לכל $|x|<\delta$. מצד שני, קיים $T_n<\delta$

לכל $k\in\mathbb{Z}$: $f(x+kT_n)=f(x)$

לכל x קיים k כך ש $x-kT_n\in[-\delta,\delta]$

$$\Rightarrow |f(x)-f(0)| = |f(\underbrace{x-kT_n}_{\in[-\delta,\delta]})-f(0)|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ קיבלנו לכל $\varepsilon>0$ $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $f(x)=f(0)=const$ סתירה!

נסמן $T=\inf T$ (T מחזורים של $f(x)$). נראה כי גם T הוא מחזור של $f(x)$.

קיימת סדרה $T_k \xrightarrow{k\to\infty} T$: לכל k, ולכל x נתון $f(x+T_k)=f(x)$.

$$\lim_{k\to\infty} f(x+T_k)=f(x)$$

$$f(x+T) = f(\lim_{k\to\infty}(x+T_k)) \underset{\text{מרציפות של } f(x)}{=} \lim_{k\to\infty} f(x+T_k) = f(x)$$

מכאן $\boxed{\text{T אכן מחזור}}$