12.6.2008

טורי חזקות ופיתוח טיילור

תזכורת: מבחני Abel ו- Dirichlet להתכנסות של הטורים: $\sum a_n b_n$:

(A) אם $\sum^{\infty} a_n(x)$ מתכנס במ"ש ו-$b_n(x)$ מונוטונית וחסומה

(D) אם $\sum_{n=0}^{N} a_n(x)$ חסומה במידה אחידה ו- $b_n(x)$ מונוטונית ואם $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

הטורים מתכנסים במ"ש.

מסקנה: משפט Abel לטורי חזקות

אם $\sum a_n$ מתכנס, אזי $\sum a_n z^n$ מתכנס במ"ש ב- $[0,1]$.

בפרט, $\boxed{\lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum a_n}$

תרגיל: הוכיח כי $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $|x|<1$.

הערה: הטור הנ"ל הוא בדיוק הטור טיילור של $\log(1+x)$. רדיוס ההתכנסות של הטור

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \Leftarrow \quad R=1$$

אפשר להוכיח את השוויון ע"י הערכה של השארית של טור טיילור, אך זאת דרך מסובכת. (רמז - דרך להעריך שארית לנוסחאות של lagrange ושל Cauchy).

נבחר בדרך אחרת.

פתרון:

$$[\log(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

סכום סדרה הנדסית — מתכנסת בקטע $[-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]$ — רדיוס התכנסות $=1$

$$\log(1+x) = \int_0^x (\log(1+t))' \, dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \Big) dt =$$

מההתכנסות במ"ש לכל $x \in (-1,1)$, ניתן להחליף בין Σ(סכום) ו $\int$(אינטגרל):

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (\text{לכל } |x|<1)$$

מש"ל

ב) שאלה בקשר לתרגיל הנ"ל

קיבלנו כי $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ מתכנס נקודתית (ל- $|x|<1$) ל- $\log(1+x)$.

מה בקשר להתכנסות במ"ש?

תשובה: בגלל שהטור הנ"ל הינו טור חזקות, יש התכנסות במ"ש בכל קטע סגור השו"ק ל- $(-1,1)$. למעשה, הטור מתכנס במ"ש (כתוצאה ממשפט Abel) בכל קטע $(-1+\varepsilon, 1]$.

ב $x=1$ הטור מתכנס כי זהו טור Leibnitz.

מסקנה

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \boxed{\ln 2},$$

הסבר:

בגלל ההתכנסות במ"ש בקטע $[-1+\varepsilon,1]$ הפונקציה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ היא רציפה באותו קטע ומהתרגיל אנו רואים כי שתי הפונקציות מתלכדות בקטע הפתוח $(-1,1)$, לכן הן גם מתלכדות בקטע $(-1,1]$.

ולכן המסקנה.