15/5/08

חדו"א 2 - הרצאה 3

משפט יסודי של אינטגרלים - Fundamental Theorem of Calculus

הגדרה: $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$

F **קדומה** של f אם $F'=f$ (בכל קטע $[a,b]$).

הערה: אם קדומה F קיימת, אזי היא יחידה עד כדי קבוע

(נניח F_1, F_2 שתי פונק' קדומות של f, אזי
$(F_1-F_2)'=f-f=0 \Rightarrow C\equiv F_1-F_2$)

משפט 1: $f\in R[a,b]$, F קדומה של f אזי

$$\boxed{\int_a^b f = F(b)-F(a)}$$

הוכחה: תהי $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ חלוקה של $[a,b]$. Lagrange

$\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$ $\quad F(x_{i+1})-F(x_i)=F'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$

$$\underbrace{S(f,\Pi,\{\xi_i\})}_{\xrightarrow{\lambda(\Pi)\to 0}\int_a^b f}=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[F(x_{i+1})-F(x_i)\right]$$

$$=F(\underset{b}{x_n})-F(\underset{a}{x_0})=F(b)-F(a)$$

$\square$

"נוסחה לפונקציה קדומה": $F(x)=\int_a^x f$ $\quad F(a)=0$

$F'(a)$

משפט 2: $f\in R[a,b]$, נגדיר $F(x)=\int_a^x f$ אזי

1) F רציפה ב- $[a,b]$

2) אם $x\in[a,b]$ נק' רציפות של f אז F גזירה ב-x ו- $\boxed{F'(x)=f(x)}$

מסקנה: לכל $f\in C[a,b]$ (פונקציה רציפה) קיימת פונקציה קדומה.

הוכחה של משפט 2 ("$h>0$")

1) $\underset{\int_a^{x+h}f\ -\ \int_a^{x}f}{F(x+h)-F(x)}=\int_x^{x+h}f=\mu\cdot h \quad \inf_{[a,b]}f\le\inf_{[x,x+h]}f\le\mu\le\sup_{[x,x+h]}f\le\sup_{[a,b]}f$

$f\in R[a,b] \Rightarrow$ f חסומה $\Rightarrow |\mu|\le C$

$|F(x+h)-F(x)|\le C|h|$

$\Leftarrow$ F רציפה.

2) נניח ש-x נק' רציפות של f. נבדוק: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{??}f(x)$

(פונ' F גזירה ונגזרת בנק' x שווה ל-$f(x)$)

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left[f(t)-f(x)\right]dt$$

$$f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x)\,dt$$

$$(*)\quad f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt$$

$$c=f(x)$$

$$c=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} c\,dt$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt-f(x)\overset{(*)}{=}$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left[f(t)-f(x)\right]dt$$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\left[f(t)-f(x)\right]dt\right|\le\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$$

$$\le\frac{1}{|h|}\cdot\sup_{t\in[x,x+h)}|f(t)-f(x)|\cdot|h|\ \le$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ \forall h:|h|<\delta\quad |f(t)-f(x)|<\varepsilon\ ,\ t\in[x,x+h]$$

(לפי רציפות של f בנק' x)

$$\le\ \varepsilon\qquad\square$$

אינטגרציה בחלקים - Integration by parts

משפט 3: $f,g\in R[a,b]$

F,G קדומות של g ו- f אזי

$$\boxed{\int_a^b Fg=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b fG}$$

$$\int_a^b Fg+\int_a^b fG=FG\Big|_a^b$$

$$=(FG)(b)-(F\cdot G)(a)$$

$$u\Big|_a^b=u(b)-u(a)$$

הוכחה של משפט 3:

$$(F\cdot G)'=F'G+FG'=f\cdot G+F\cdot g$$

$F\cdot G$ קדומה של $(fG+Fg)$. לפי משפט 1:

$$\int_a^b(Fg+fG)=FG\Big|_a^b\qquad\square$$

מסקנה: $F,G\in C'[a,b]$ (גזירות ברציפות ב $[a,b]$) אזי

$$\boxed{\int_a^b FG'=F\cdot G\Big|_a^b-\int_a^b F'G}$$

Integral form of Taylor's remainder (נוסחה אינטגרלית לשארית)

נניח ש $f\in C^n[a,b]$ (גזירה n פעמים) ו- $f^{(n)}$ רציפה ב (a,b).

אז $$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+R_{n-1}(b,a,f)$$

$$R_{n-1}(b;a;f)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{רציפה}}\underbrace{(b-t)^{n-1}}_{\geq 0}dt$$

מסקנה: $\exists c\in(a,b)$ כך ש

$$=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(c)\int_a^b \underbrace{(b-t)^{n-1}}_{=\left(-\frac{(b-t)^n}{n}\right)'_t}dt=\boxed{\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n}$$

→ Lagrange

הוכחה של הנוסחה:

$n=1$: $$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)(b-t)^0\,dt \quad \square$$

$n-1\to n$: $$R_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)\underbrace{(b-t)^{n-1}}_{=\left(-\frac{(b-t)^n}{n}\right)'}dt \overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\left\{-\frac{f^{(n)}(t)(b-t)^n}{n}\Big|_a^b+\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}(a)(b-a)^n+\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt\right\}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_n$$

$$R_{n-1}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_n \quad \square$$

החלפת משתנה - Change of variable

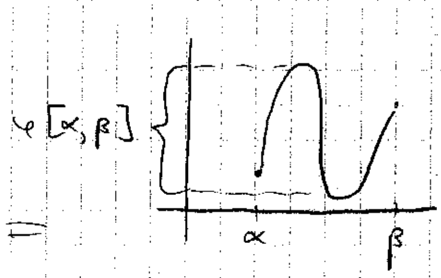
תמונה של $[\alpha,\beta]$

משפט 1: $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, $f\in C[\varphi[\alpha,\beta]]$ אז

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(s)\varphi'(s)\,ds$$

הסבר: "$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(\varphi)\,d\varphi$"

הוכחה: קיימת קדומה F של f



$$(F\circ\varphi)'=(f\circ\varphi)\varphi'$$

$\Leftarrow (F\circ\varphi)$ קדומה של $\underbrace{(f\circ\varphi)\varphi'}_{\text{רציפה ב}[\alpha,\beta]}$

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'=(F\circ\varphi)\Big|_\alpha^\beta=F(\underbrace{\varphi(\beta)}_{b})-F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{a})=F(b)-F(a)=\int_a^b f \quad \square$$

<u>משפט 2</u>: $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, מונ' ממש

$f\in R[a,b]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ אז

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(s)\varphi'(s)\,ds$$

<u>הוכחה</u>: $[\alpha,\beta]$ - Π_s, $\{\xi_i\}$

$$\alpha=s_0<s_1<\dots<s_n=\beta$$

$$\Pi_t=\varphi(\Pi_s),\quad \tau_i=\varphi(\xi_i)\qquad t_i\le\tau_i\le t_{i+1}$$

$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\quad,\ t_i=\varphi(s_i)\qquad 0\le i\le n-1$$

$$\lambda(\Pi_t)\le \underset{\substack{\max\limits_{[\alpha,\beta]}\varphi'}}{\overset{\shortparallel}{C_\varphi}}\lambda(\Pi_s)\qquad (*)$$

$$S(f,\Pi_t,\{\tau_i\})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\tau_i)(t_{i+1}-t_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ\varphi)(\xi_i)\underbrace{(\varphi(s_{i+1})-\varphi(s_i))}_{=\varphi'(\tilde\xi_i)(s_{i+1}-s_i)}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ\varphi)(\xi_i)\varphi'(\tilde\xi_i)(s_{i+1}-s_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ\varphi)(\xi_i)\varphi'(\xi_i)(s_{i+1}-s_i)+\sum_{i=0}^{n-1}(f\circ\varphi)(\xi_i)\left[\varphi'(\tilde\xi_i)-\varphi'(\xi_i)\right](s_{i+1}-s_i)$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2\qquad \overbrace{s_i\ \ \xi_i\ \ \tilde\xi_i\ \ s_{i+1}}^{\Delta_i=[s_i,s_{i+1}]}$$

<u>טענה</u>: $\Sigma_2\to0$ כאשר $\lambda(\Pi_s)\to0$

<u>הוכחה של טענה</u>:

φ' רציפה במ"ש ב- $[\alpha,\beta]$ $\Leftarrow$ לכן $s_{i+1}-s_i<\delta$ אז

$$\omega(\varphi',\Delta_i)<\varepsilon\quad(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0)$$

אם $\lambda(\Pi_s)<\delta$

$$|\Sigma_2|<\sup_{[a,b]}|f|\sum_{i=0}^{n-1}\omega(\varphi',\Delta_i)(s_{i+1}-s_i)<\varepsilon\cdot\sup|f|\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1}-s_i)}_{=\beta-\alpha}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \lambda(\Pi_s)<\delta\Rightarrow|\Sigma_2|<\varepsilon\cdot\sup_{[a,b]}|f|(\beta-\alpha)\qquad\square$$

$$\Sigma_1=S((f\circ\varphi)\varphi',\Pi_s,\{\xi_i\})=S(f,\Pi_t,\{\tau_i\})+o(1)\ ,\ \lambda(\Pi_s)\to0$$

קיים גבול ל- LHS $\Leftarrow$ $RHS\longrightarrow\int_a^b f(t)\,dt$ בסוף בצד ימין

$\Leftarrow$ קיים שוויון $\qquad \int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)(s)\varphi'(s)\,ds=\int_a^b f(t)\,dt$

$\square$