העתקות לינאריות

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$\|A\| \overset{def}{=} \max_{|x|=1} |Ax| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|}{|x|}$$

$$\boxed{|Ax| \le \|A\| \cdot |x| \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n}$$

- $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
- $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

הוכחה של אי-השוויון האחרון:

$$|(A \cdot B)x| = |A(Bx)| \le \|A\| \cdot |Bx| \le \|A\| \cdot \|B\| |x|$$

כלומר $|ABx| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|$

$$\Rightarrow \|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

טענה: אם $\mathrm{Mat}\, A = [a^i_j]$ אז $\Leftarrow$ $\|A\|^2 \le \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} (a^i_j)^2$

(כאשר הביטוי של העתקה לינארית תואם ל- n על m האיברים במטריצה של ההעתקה.

הוכחה:

$$y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^m (y^i)^2$$

$$\{f_i\} \subset \mathbb{R}^m \quad , \quad \{e_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$$

$$Ax = \sum_j x^j A e_j$$

$$A e_j = \sum_{i=1}^m a^i_j f_i \quad , \quad a^i_j = \langle Ae_j, f_i \rangle \quad , \quad y^i = \sum_{j=1}^n x^j a^i_j$$

$$(y^i)^2 = \left(\sum_{j=1}^n x^j a^i_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^n (a^i_j)^2 \le \sum_{j=1}^n (a^i_j)^2 \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n (x^j)^2}_{|x|^2}$$

כ"ש

$$(y^i)^2 \le \left(\sum_{j=1}^n (a^i_j)^2\right) |x|^2$$

$$\Rightarrow |y|^2 = \sum_{i=1}^m (y^i)^2 \le \underbrace{\left(\sum_{i,j} (a^i_j)^2\right)} \cdot |x|^2$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \le \longrightarrow$$

(עקבה)

$$\sum_{i,j}(a^i_j)^2 = tr(\underbrace{A^*A}_{\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)})$$

2) $$\sum_{i,j}(a^i_j)^2 \le n\|A\|^2$$

ת.ב : לבדוק

3) עבור n=1 ההעתקה היא פונקציונל ליניארי:

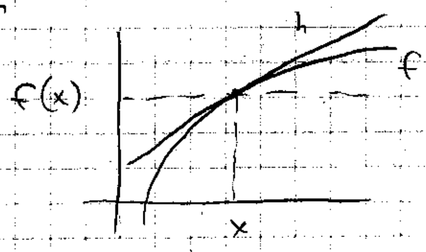
$$A \in L(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^m)$$
$$\sum_{i=1}^m (a^i)^2 = \|A\|^2$$

$$A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^1)$$
$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2$$

<u>העתקות גזירות</u> Differentiable maps

$U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה , $f: U \to \mathbb{R}^m$, $x \in U$

בחדו"א 1 הגדרנו נגזרת: (עבור $n=m=1$) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



$$y \longmapsto f(x)+f'(x)(y-x)$$
$$f(y) - [f(x)+f'(x)(y-x)] = o(y-x)\ ,\ y \to$$

עבור $y=x+h$: $h \longmapsto f(x)+f'(x)h$

$\Leftarrow$ הפונקציה f גזירה בנק' x $\Leftrightarrow$ אפשר לקרב את f מסביבה של x ע"י פונקציה (העתקה) אפינית

$$f(x+h) = a+bh+o(h)\ ,\ h\to 0$$
$$b=f(x)\ ,\ a=f'(x)$$

<u>הגדרה</u>: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>העתקה אפינית</u> אם

$$g(x) = Ax+b\ ,\ A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\ ,\ b\in\mathbb{R}^m$$
$$g(h) = Ah+b\ ,\ h\in\mathbb{R}^n$$

<u>הגדרה</u>: f גזירה ב-x אם קיימת העתקה אפינית $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש

$$f(x+h) = g(h)+o(h)\ ,\ h\to 0$$
$$f(x+h) = b+Ah+o(h)\ ,\ h\to 0$$
$$b = f(x)$$

לכן ניתן להגדיר בצורה שקולה:

f גזירה בנק' x אם $\exists A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך ש

$$f(x+h)=f(x)+Ah+o(h)\ ,\ h\to 0\quad h\in\mathbb{R}^n \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{|h|}=0 \qquad (2)$$

• אם f גזירה בנק' A <= העתקה A יחידה.

$|e|=1\ ,\ h=te$

$$f(x+te)-f(x)=tAe+o(t)$$

$$Ae=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te)-f(x)}{t}$$

$|e|=1 \Rightarrow Ae$

$$Ah=|h|\cdot Ae\ ,\ h\in\mathbb{R}^n\ (h=|h|e)$$

<= אם A קיימת <= היא יחידה

<u>הגדרה</u>: נגזרת של f בנק' x $Df(x)=A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

כלומר נגזרת זו העתקה ולא מספר כמו בחדו"א 1

סימונים נוספים לנגזרת $\left(=f'(x)=df(x)=Df(x)\right)$

<u>מטריצה של $Df(x)$</u>

$\{e_j\}\subset\mathbb{R}^n\ ,\ \{e_i'\}\subset\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n\ni h=\sum_{j=1}^n h^j e_j$$

$$Df(x)h=\sum_{j=1}^n h^j Df(x)e_j$$

$$\underbrace{Df(x)e_j}\overset{(3)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$$

(הנגזרת הכיוונית של f לפי וקטור e_j ב-$\mathbb{R}^n$ לכן מקבלים וקטור ב-$\mathbb{R}^m$ $\in\mathbb{R}^m$)

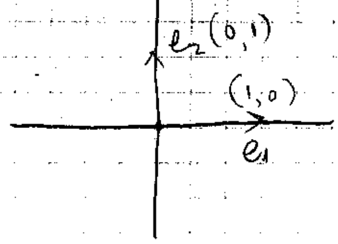
$$Df(x)e_j=\langle Df(x)e_j,e_i'\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{f^i(x+te_j)-f^i(x)}{t}=:\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)$$

אז

$$\mathrm{Mat}[Df(x)]=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=J_f(x)$$

מטריצת Jacobi של f בנק' x

$$\frac{df}{dx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$



$(x_1,x_2)=(x,y)$

$$\frac{df}{dy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$[\mathrm{Mat}\, Df(0,0)]=\left[\frac{df}{dx}(0,0),\ \frac{df}{dy}(0,0)\right]$$

לדוגמא: $f(x,y)=x^3+y^2$

$$\frac{df}{dx}(0,0)=(x^3)'_{x=0}=(3x^2)_{x=0}=0$$

<u>דוגמא 1</u>: $f(x)=Ax+b$

$A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $b\in\mathbb{R}^m$

f גזירה בכל $\mathbb{R}^n$ ו- $Df(x)=A$

<u>דוגמא 2</u>: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^2+\sin z\\ y+z^3\\ 1+x+z\end{pmatrix}\begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{matrix}$$

$(x,y,z)=(1,1,1)$, נמצא את מטריצת יעקוביאן של ההעתקה:

$$\mathrm{Mat}[Df]=J_f(1,1,1)=\begin{bmatrix}2&0&\cos 1\\0&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}$$

בשורה השנייה לוקחים רק את $y+z^3$; גוזרים לפי x - זה אפס, גוזרים לפי y זה 1 וגוזרים לפי z - $3z^2$ ואז 3

<u>משפט 1</u>: $f,g:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה

כיצד שמוצאים את ההעתקה עבור כל -

$$J_f(x,y,z)=\begin{bmatrix}2x&0&\cos z\\0&1&3z^2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$x\in U$, f,g גזירות ב-x אזי $f+g$ גזירה ב-x !

$D(f+g)(x)=Df(x)+Dg(x)$ (לבדוק)

<u>משפט 2</u>: $f:U\to\mathbb{R}^m$

f גזירה ב $x\in U\subset\mathbb{R}^n$ אמ"מ כל פונקציה f^i, $1\le i\le m$ גזירות בנק' x.

(למשל בדוגמא 2 צריך שהפונ' f_1, f_2, f_3 גזירות)

<u>הוכחה:</u> f גזירה ב-x $\Leftarrow$ ...

$\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^i(x+h) - f^i(x) - (Ah)^i}{|h|} = 0$$

$\Leftarrow$ f^i גזירה ב-x ו- $h \to (Ah)^i$ נגזרת של f^i בנק' x.

<u>ת.ב.</u> נניח $f_1, \dots, f_n$ פונקציות גזירות מ-$\mathbb{R}^1$ ל-$\mathbb{R}^1$ אז $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^j)$ גזירה בכל x

$x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$

<u>טענה 3:</u> נניח f גזירה בנק' x ו- $\|Df(x)\| < C$
אז $\exists \delta \; \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta \quad |f(x+h) - f(x)| \leq C|h|$

<u>מסקנה:</u> f רציפה בנק' x

<u>הוכחה של טענה 3:</u> נבחר $\varepsilon = C - \|Df(x)\| > 0$ הוא $o(h)$ כי הביטוי משמאל

f גזירה ב-x: $\exists \delta \; \forall h, |h| < \delta \quad |f(x+h) - f(x) - Df(x)h| < \varepsilon|h|$

$$|f(x+h) - f(x)| \underset{\uparrow}{\leq} |Df(x)h| + \varepsilon|h| \underset{\uparrow}{\leq} \|Df(x)\| \cdot |h| + \varepsilon|h| = (\|Df(x)\| + \varepsilon)|h| = C|h|$$

אי שוויון המשולש $\qquad$ הגדרה של נורמה $\qquad \square$

[$\varphi(h) = o(|h|)$ אם: $\forall \varepsilon \, \exists \delta \; |h| < \delta \Rightarrow |\varphi(h)| < \varepsilon|h|$]

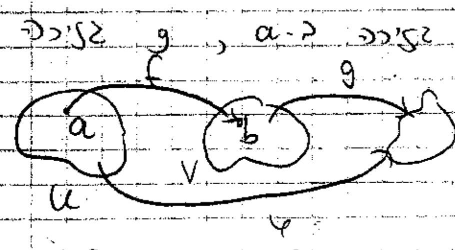
<u>טענה 4:</u> (Chain Rule)

$f: U \to \mathbb{R}^m$, $f(U) \subset V$, $g: V \to \mathbb{R}^k$ $\qquad \varphi = g \circ f$

U, V פתוחות, $a \in U$, $b = f(a) = V$

f גזירה ב-a, g גזירה ב-b $\Leftarrow$ φ גזירה ב-a ו-

$(D\varphi)(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$



<u>הוכחה:</u> $A = Df(a)$, $B = Dg(b)$

צ' / הוכיח $\qquad$ (1) $\quad r_\varphi(x) \overset{def}{=} \varphi(x) - \varphi(a) - B \cdot A(x-a) \overset{??}{=} o(|x-a|)$

f גזירה ב-a: $\qquad$ (2) $\quad r_f(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = o(|x-a|)$

g גזירה ב-b: $\qquad$ (3) $\quad r_g(y) = g(y) - g(b) - B(y-b) = o(|y-b|)$

$$r_\varphi(x)=(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)-B\cdot A(x-a)=\underbrace{g(f(x))-g(b)-B(f(x)-b)}_{=r_g(f(x))}+\underbrace{B(f(x)-b)-BA(x-a)}_{=B\,r_f(x)}$$

כלומר קיבלנו

$$(4)\quad \boxed{r_\varphi(x)=r_g(f(x))+B\,r_f(x)}$$

• נקבע $\varepsilon>0$. נבחר $\eta>0$ (לפי הגדרה של g):

$$(5)\quad |y-b|<\eta \Rightarrow |r_g(y)|\overset{(3)}{<}\varepsilon|y-b|$$

נבחר $\delta>0$

רציפות של f בנק' a (6)

אי-שוויון המשולש (7)

$$|x-a|<\delta \Rightarrow \begin{cases}|f(x)-\overbrace{f(a)}^{=b}|<\eta\\ |r_f(x)|\overset{(2)}{<}\varepsilon|x-a|\end{cases}$$

$$|r_g(f(x))|<\varepsilon|f(x)-b|=\varepsilon|f(x)-f(a)|=\varepsilon|A(x-a)+r_f(x)|\le$$

$$\varepsilon|A(x-a)|+\varepsilon|r_f(x)|\le\varepsilon\|A\||x-a|+\varepsilon^2|x-a|$$

$$|B\,r_f(x)|\le\|B\||r_f(x)|\le\|B\|\cdot\varepsilon|x-a|$$

$$|r_\varphi(x)|\le\varepsilon\|A\||x-a|+\varepsilon^2|x-a|+\|B\|\cdot\varepsilon|x-a|=\varepsilon(\|A\|+\varepsilon+\|B\|)|x-a|$$

$\Rightarrow$ (1) מתקיים

<u>מסקנות</u>

$L\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)$ $\qquad D(L\circ f)=L\circ Df$

$M\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ $\qquad D(f\circ M)=Df\circ M$

משיעור הבא: $m=1$

נדבר רק על פונקציה של כמה משתנים $f:U\to\mathbb{R}^1$