5.3.08

①

מתמטיקה בדידה - תרגול

עוצמות

תהיינה B, A קבוצות

$|A| = |B|$ אם קיימת פ׳ שקילות מ-A ל-B

$|A| \le |B|$ $\Leftrightarrow$ קיימת פונ׳ חח״ע מ-A ל-B $\Leftrightarrow$ קיימת פונ׳ על מ-B ל-A (אם $A \neq \emptyset$)

__משל:__ אם $A \subseteq B$ אז $|A| \le |B|$ (לפי $\lambda x \in A. x$ חח״ע)

נראה בדרך נוספת כי $[0,1] \sim [0,1)$

לשם כך נזכר במשפט __קנטור-ברנשטיין__: אם a, b עוצמות המקיימות $a \le b \wedge b \le a$ אז $a = b$.

$|[0,1]| \le |[0,1)|$ לפי $\lambda x \in [0,1]. \frac{x}{2}$ חח״ע

$|[0,1)| \le |[0,1]|$ לפי $\lambda x \in [0,1). x$ חח״ע ומקנטור ברנשטיין (קב) $|[0,1]| = |[0,1)|$

☒

משפט קנטור לכל קבוצה A. $2^{|A|} = |P(A)| > |A|$

__מהן העוצמות שאנו מכירים?__ $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$$0 < 1 < 2 < \dots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph < 2^{\aleph} < 2^{(2^{\aleph})} < \dots$$

? ? ?

כל קבוצה בעוצמה $< \aleph_0$ היא קבוצה סופית.

השערת הרצף טוענת שאין עוצמות נוספות, __אך לא נשתמש בה__.

__משפט__ אם A אינסופית אז קיימת לה תת קבוצה בת מניה (שעוצמתה $\aleph_0$)

__תרגיל__ לאיזו קבוצה עוצמה גדולה יותר:

$\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$?

$$|\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R})| = |(\mathbb{N} \to \mathbb{R})^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N} \to \mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = (|\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|})^{|\mathbb{N}|} = (\aleph^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph$$

$$|\mathbb{R} \to \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{R}|} = \aleph_0^{\aleph} \underset{\text{קנטור ברנשטיין}}{=} 2^{\aleph}$$

$$2^{\aleph} \le \aleph_0^{\aleph} \le \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$$

לכן עוצמתה של $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$ גדולה יותר (משפט קנטור)

__טענה__ לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + 1 = a$.

__הוכחה:__ ניקח קבוצה A כך ש- $|A| = a$ ולפי המשפט קיימת $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = \aleph_0$

$$a = |A| = |(A \setminus B) \cup B| \underset{\text{איחוד זר}}{=} |A \setminus B| + |B| = |A/B| + \aleph_0 = |A/B| + (\aleph_0 + 1) = |A/B| + |B| + 1$$

הראינו שבעוצמה $\aleph_0$ ... בשבוע שעבר

$$= |(A/B) \cup B| + 1 = |A| + 1 = a + 1.$$ ☒

<u>טענה:</u> לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a+\aleph_0=a$,

<u>הוכחה:</u> כמו בטענה הקודמת... $a = \ldots = |A\setminus B| + \aleph_0 = |A\setminus B| + \aleph_0 + \aleph_0 = |A| + \aleph_0 = a+\aleph_0$

☒

<u>שאלה מבחינה</u>

א. הוכיחו כי לכל עוצמה אינסופית a $2^a+2^a=2^a$

ב. הוכיחו כי לכל עוצמה a קיימת עוצמה b כך ש $a+b=b$.

<u>פתרון:</u>

א. $2^a+2^a=2\cdot 2^a = 2^{a+1} \underset{\substack{\text{לפי טענה}\\\text{שהוכחנו}\\\text{(a אינסופית)}}}{=} 2^a$

ב. אם a עוצמה סופית ($a\in\mathbb{N}$) אז נבחר $b=\aleph_0$ ונקבל $a+b=a+\aleph_0=\aleph_0=b$

כעת נניח ש a אינסופית

<u>"הוכחה" שגויה!</u> נבחר $b=a$, במסגרת הקורס אנחנו יודעים להראות ש $a+a=a$ לכל עוצמה אינסופית a.

<u>הוכחה:</u> נבחר $b=2^a$, נראה כי $a+2^a=2^a$

$$2^a = 0+2^a \underset{\text{קנטור}}{\le} \boxed{a+2^a} \le 2^a+2^a \underset{\text{אינסופית}}{=} 2^a$$

לכן $a+b=b$ מקנטור ברנשטיין.

<u>מסקנה 1:</u> תהי A קבוצה אינסופית שאינה בת מנייה, ותהי B קבוצה בת מנייה כך ש- $B\subseteq A$ אזי $A/B\sim A$.

<u>הוכחה:</u> נשים לב שהקבוצה A/B אינסופית, כי אחרת $|A/B|=n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ ואז $|A|=|A/B|+|B|=n+\aleph_0=\aleph_0$, אבל A לא בת מנייה.

כעת נוכל להשתמש בטענה $|A/B| \underset{\text{אינסופית}}{=} |A/B|+\aleph_0 = |A/B|+|B| \underset{\text{זרות}}{=} |A/B\cup B| = |A|$

☒

<u>מסקנה:</u> $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}|=\aleph$

<u>הוכחה:</u> $|\mathbb{R}|=\aleph$ לא בת מנייה, $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ ולכן $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \overset{\text{מסקנה 1}}{=} |\mathbb{R}|=\aleph$.

<u>שאלה:</u> לאיזה עוצמות a מתקיים $\aleph_0\cdot 2^a=2^a$?

<u>פתרון:</u> עוצמות סופיות אינן מקיימות את הדרוש כי 2^a סופית ולכן $\aleph_0\cdot 2^a$ אינסופית.

נראה כי כל עוצמה אינסופית מקיימת את הדרוש.

$$\aleph_0\cdot 2^a \underset{\text{אינסופית}}{=} \aleph_0\cdot 2^{a+\aleph_0} = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}\cdot 2^a = \aleph_0\cdot\aleph\cdot 2^a = 2^{\aleph_0}\cdot 2^a = 2^{a+\aleph_0} \underset{\text{אינסופית}}{=} 2^a$$

הם שיכבו כל העוצמות האינסופיות.

5.3.08 (3)

מתמטיקה בדידה (תרגול)

<u>שאלה מהתרגול:</u> הוכיחו כי לכל $a \neq 0$ קיים $b \neq 0$ כך ש $a \cdot b = b$

<u>הוכחה:</u> תהי עוצמה $a \neq 0$. נבחר $b = a^{\aleph_0}$

☒ $a \cdot b = a \cdot a^{\aleph_0} = a^{\aleph_0 + 1} = a^{\aleph_0} = b$

חישובי עוצמות - וחסם

1. מהי עוצמת קבוצת כל היחסים בקבוצה $\mathbb{R}$? הקבוצה היא $P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$|P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = |2^{|\mathbb{R} \times \mathbb{R}|}| = 2^{|\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{R}|} = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$

2. מהי עוצמת קבוצת כל היחסים הא-רפלקסיביים בקבוצה $\mathbb{R}$?

הקבוצה היא - $P((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\})$

נסמן - $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$ והתשובה תהיה 2^{A},

מצד אחד, $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ולכן $|A| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \aleph \cdot \aleph = \aleph$

מצד שני, $\{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq A$

$\{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}$ לפי פונק' השקילות $\lambda x \in \mathbb{R}. \langle x, x+1 \rangle$.

כעת, $|A| \geq |\{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}| = |\mathbb{R}| = \aleph$

משפט קנטור ברנשטיין $|A| = \aleph$ ולכן התשובה $2^{|A|} = 2^{\aleph}$

3. מהי עוצמת קבוצת היחסים הטרנזיטיביים בקבוצה $\mathbb{R}$? נסמן קבוצה זו כ- B.

מצד אחד, $B \subseteq \underset{\text{קבוצת כל היחסים}}{P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}$ ולכן $|B| \leq |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{\aleph}$,

מצד שני, $P(\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}) \subseteq B$ <u>הסבר:</u> אם $S \subseteq \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$ אז S טרנזיטיבי
כי $xSy \wedge ySz \Rightarrow x = y \wedge ySz \Rightarrow xSz$.

ולכן:

$|B| \geq |P(\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\})| = 2^{|\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}|} \underset{\text{פונקצית שקילות } \lambda x \in \mathbb{R}. \langle x, x \rangle}{=} 2^{|\mathbb{R}|} = 2^{\aleph}$

מקנטור ברנשטיין $|B| = 2^{\aleph}$.

4. מהי עוצמת קבוצת יחסי השקילות בקבוצה $\mathbb{R}$? נסמן אותה ב- C.

כמו מקודם, $C \subseteq P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ולכן $|C| \leq 2^{\aleph}$

מצד שני, נראה פונק' חח"ע מהקבוצה $P([0,1])$ ל- C, שמתאימה לכל קבוצה $X \subseteq [0,1]$ את יחס השקילות המתאים לחלוקה $\{X, \mathbb{R} \setminus X\}$ (אם X ריקה אז היחס יהיה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

$H \in P([0,1]) \to C$, $H = \lambda X \in P([0,1]). (X \times X) \cup ((\mathbb{R} \setminus X) \times (\mathbb{R} \setminus X))$

היחס -ש [illegible] שקילות לפי משפט הפרק נראה כי H חח"ע.

ונקבל $|C| \geq |P([0,1])| = 2^{|[0,1]|} = 2^{\aleph}$

5.3.08 (4)

מתמטיקה בדידה - תרגול

<u>H חח"ע</u>: תהיינה $X_1 \neq X_2 \in P([0,1])$ ונראה כי $H(X_1) \neq H(X_2)$. $X_1 \neq X_2$ ולכן בה"כ

$\exists y \in [0,1]. y \in X_1 \wedge y \notin X_2$.

נקבל $\langle y, 100 \rangle \in H(X_2)$, $H(X_1) \not\ni \langle y, 100 \rangle$ ולכן $H(X_1) \neq H(X_2)$ ☒

חישובי עוצמות פונקציות

1. מהי עוצמת הקבוצה $\{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \text{ על } f\}$?

אם $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ היא על אז $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \geq |\mathbb{R}| = \aleph$ וזו סתירה.

ולכן, אין פונקציה כזו. הקבוצה היא ריקה $\emptyset$.

2. מהי עוצמת $D = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ פונקציה שהיא } \text{ו-}\mathbb{N} \text{ על } \mathbb{N}\}$?

מצד אחד $D \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ולכן $|D| \leq |\mathbb{N} \to \mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$

אפשר להראות עם קנטור ברנשטיין

מצד שני, נתאר פונק' חח"ע $H \in P(\mathbb{N}_{even}) \to D$

$$H = \lambda x \in P(even). \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} n+1 & n \in \mathbb{N}_{even} \wedge n \in x \\ n-1 & n \in \mathbb{N}_{odd}, n-1 \in x \\ n & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי H חח"ע ונקבל, $\aleph = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N}_{even})| \leq |D|$ מקנטור ברנשטיין: $\aleph = |D|$.

<u>H חח"ע</u>: תהיינה $X_1 \neq X_2 \in P(\mathbb{N}_{even})$ ובה"כ $\exists m \in \mathbb{N}_{even}. m \in X_1 \wedge m \notin X_2$.

$(H(X_2))(m) = m$, $(H(X_1))(m) = m+1$

לכן $H(X_2) \neq H(X_1)$ כנדרש ☒.