20.2.08

מתמטיקה בדידה (תרגול)

שאלה: כמה יחסי שקילות קיימים מעל הקבוצה $A=\{1,2,3\}$?

פתרון:
- $(1\ 2)\ (3)$ מתאימה ליחס $\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<3,3>\}$
- $(1)\ (2\ 3)$ (2 מחלקות שקילות, הבחנה מאוד דומה ל-2)
- $(1\ 2\ 3)$ מתאימה ליחס $A\times A$
- $(1)\ (2)\ (3)$ מתאימה ליחס $\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
- $(1\ 3)\ (2)$

בסה"כ 5 יחסי שקילות

דוגמה: יהי S יחס שקילות בקבוצה $P(\mathbb{R})$ המוגדר כך:

$$\forall X,Y\in P(\mathbb{R}).\ XSY \iff X\cap\mathbb{N}=Y\cap\mathbb{N}$$

S יחס שקילות (הוכחה דרך להוכיח).

יהי מחלקת השקילות $\{5.1,\ 4,\ 1\frac{1}{2}\}$ הקבוצה של כל הקבוצות של $\mathbb{R}$ שחיתוכן עם הטבעיים הוא $\{4\}$.

$$[\{1\tfrac{1}{2},\ 4,\ 5.1\}]_S = [\{4\}]_S = [\{4,\pi\}]_S = \{X\in P(\mathbb{R}) \mid X\cap\mathbb{N}=\{4\}\}$$

מהי קבוצת המנה?

$$P(\mathbb{R})/S = \left\{[X]_S \mid X\in P(\mathbb{R})\right\} = \left\{[X]_S \mid X\in P(\mathbb{N})\right\}$$

סעיף מחשבה:

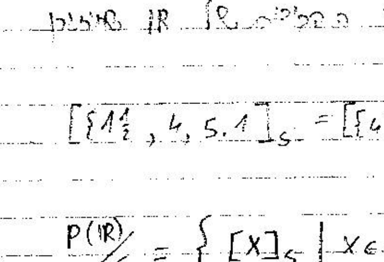
יהי $S\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ יחס שקילות שהמשלים של $\bar{S}=(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus S$ טרנזיטיבי

כמה איברים בקבוצת המנה $\mathbb{R}/S$?

$$\bar{<} = \{<x,y>\in R\times R \mid \neg(x<y)\} = \{<x,y>\in R\times R \mid x\geq y\} = \geq$$

(נשים לב שזה רק דוגמה של משלים טרנזיטיבי כי $<$ אינו יחס שקילות)

פתרון: בקבוצת המנה איבר אחד (כלומר $S=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)



נניח בשלילה שקיימים $x,y\in\mathbb{R}$ ממחלקות שקילות שונות אזי

$$x\bar{S}y \wedge y\bar{S}x \underset{\bar{S}\text{ טרנזיטיבי}}{\Rightarrow} x\bar{S}x = \neg(xSx) \Rightarrow$$ סתירה לרפלקסיביות של S

☒

תרגיל:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{2^n},\ n+1\right) = (-1,1)\cap\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$$

20.2.08 ①

מתמטיקה בדידה - תרגול

יחסים

יחס R מעל (בתוך) קבוצה A $\quad R \subseteq A \times A$

דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ $\quad R=\{<1,3>,<1,2>,<2,2>,<3,2>\}$

	1	2	3
1		√	√
2		√	
3		√	

$<a,b> \in R \iff aRb \iff$ a מתייחס ל-b ביחס R

$< \; = \{<x,y> \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x<y\}$ (קטן)

תכונות של יחסים

1. רפלקסיבי - $\forall x \in A.\ xRx$ (האלכסון כולו מלא ב-√)
2. סימטרי $\forall x,y \in A.\ xRy \leftrightarrow yRx$
3. טרנזיטיבי - $\forall x,y,z \in A.\ xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

דוגמא: יהי S יחס בקבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר כך:

$\forall x,y \in \mathbb{R}.\ xSy \iff |x-y|<3$

ניתן לכתוב כקבוצה:

$S=\{<x,y> \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x-y|<3\}$

$=\{<1,2>,<1,3>,<\frac{1}{2},\frac{1}{2}>\ldots\}$

- האם רפלקסיבי? כן.
$\forall x \in \mathbb{R}.\ xSx \iff \forall x \in \mathbb{R}.\ |x-x|<3\ .\ \forall x \in \mathbb{R}.\ 0<3 = T$

- האם סימטרי? כן. יהי $x,y \in \mathbb{R}$
$xSy \iff |x-y|<3 \iff |y-x|<3 \iff ySx$

- האם טרנזיטיבי? לא.
למשל: $(1S3) \wedge (3S5) \wedge \neg(1S5)$

פעולות על יחסים [יהי R יחס מעל A]

1. יחס הופכי (הפוך): $R^{-1}=\{<a,b> \in A\times A \mid bRa\}$

$<^{-1} = >\ ,\ (R^{-1})^{-1}=R$

טענה: לכל יחס R מעל A מתקיים R סימטרי אמ"מ $R=R^{-1}$.

הוכחה:

$R=R^{-1} \iff (\forall x,y \in A.\ <x,y> \in R \leftrightarrow <x,y> \in R^{-1}) \iff (\forall x,y \in R.\ xRy \leftrightarrow xR^{-1}y)$

$\iff (\forall x,y \in A.\ xRy \leftrightarrow yRx) \iff$ R סימטרי ☒

2. הרכבה של יחסים: יהיו R, S יחסים בקבוצה A.

$$S\circ R = \{\langle x,z\rangle \in A\times A \mid \exists y \in A.\ xRy \wedge ySz\}$$

דוגמאות:

$$\{\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\} \circ \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle\}$$

$$= \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$$

דוגמה: יהי S היחס: $S = \{\langle q,2q\rangle \mid q\in \mathbb{Q}\}$

$$S\circ S = \{\langle x,z\rangle \mid \exists y.\ xSy \wedge ySz\} = \{\langle x,z\rangle \mid \exists y.\ y=2x \wedge y\in \mathbb{Q} \wedge z=2y\}$$

$$= \{\langle x,z\rangle \mid x\in \mathbb{Q} \wedge z=4x\} = \{\langle q,4q\rangle \mid q\in \mathbb{Q}\}$$

ידוע $R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$.

$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$ (פעולת ההרכבה אינה קומוטטיבית, באופן כללי $R\circ S \neq S\circ R$).

טענה: אם R יחס מעל קבוצה A, R טרנזיטיבי אמ"מ $R\circ R\subseteq R$

הוכחה: $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-R טרנזיטיבי. נוכיח $R\circ R \subseteq R$

$$\langle x,z\rangle \in R\circ R \Rightarrow \exists y\in A.\ \langle x,y\rangle\in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \underset{\text{טרנזיטיבי } R}{\Rightarrow} \langle x,z\rangle \in R$$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $R\circ R\subseteq R$ ונוכיח R טרנזיטיבי. יהיו $x,y,z\in A$.

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists y\in A.\ xRy \wedge yRz \underset{\text{הגדרת ההרכבה}}{\Rightarrow} x(R\circ R)z \underset{\text{הנחה}}{\Rightarrow} xRz$$

ולכן טרנזיטיבי ☒.

תרגיל: יהיו R,S יחסים על קבוצה A. נניח ש-R ו-S טרנזיטיביים.

(א) האם $R\cap S$ טרנזיטיבי? כן. יהיו $x,y,z\in A$

$$x(R\cap S)y \wedge y(R\cap S)z \Rightarrow xRy \wedge xSy \wedge yRz \wedge ySz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xRy \wedge yRz)\wedge(xSy\wedge ySz) \underset{\text{טרנזיטיביים } S,R}{\Rightarrow} xRz \wedge xSz \Rightarrow x(R\cap S)z$$

מש"ל ☒

(ב) האם $R\cup S$ טרנזיטיבי? לא.

נבחר $A=\{1,2\}$, $R=\{\langle 1,2\rangle\}$, $S=\{\langle 2,1\rangle\}$, $R\cup S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

R ו-S טרנזיטיביים אבל $R\cup S$ אינו טרנזיטיבי כי $\langle 1,1\rangle$ לא שייך לאיחוד

20.2.09
3

מתמטיקה בדידה - תרגול

יחסי שקילות

יחס R מעל קבוצה A שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי נקרא: יחס שקילות.

משפט: יהי R יחס שקילות על קבוצה A אזי $R \circ R = R$

הוכחה: נוכיח כי $R \circ R = R$ ע"פ הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$: R יחס שקילות ולכן טרנזיטיבי. ולכן $R \circ R \subseteq R$.

$\supseteq$: $\langle x,y\rangle \in R \underset{R \text{ רפלקסיבי}}{\Rightarrow} \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,y\rangle \in R \Rightarrow \exists b \in A.\ xRb \wedge bRy$

$\underset{\text{ע"פ הגדרת ההרכבה}}{\Rightarrow} \langle x,y\rangle \in R \circ R$

הערה: בעצם הוכחנו שאם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי $R \circ R = R$.

תרגיל: יהיו S,R יחסי שקילות על הקבוצה A המקיימים $R \circ S = S \circ R$.
הוכיחו כי $R \circ S$ הוא יחס שקילות.

הוכחה: • רפלקסיבי: השלמה ([illegible])

• סימטרי: די להראות ש- $(R \circ S)^{-1} = R \circ S$

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \underset{R,S \text{ סימטרים}}{=} S \circ R \underset{\text{נתון}}{=} R \circ S.$$

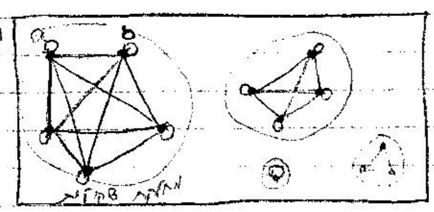
• טרנזיטיביות: די להראות ש- $(R \circ S) \circ (R \circ S) \subseteq R \circ S$ [illegible]

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} R \circ (S \circ R) \circ S \underset{\text{נתון}}{=} R \circ (R \circ S) \circ S \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} (R \circ R) \circ (S \circ S) \underset{\text{ע"פ משפט, } S,R \text{ שקילות}}{=} R \circ S.$$

לכן $R \circ S$ הוא יחס שקילות. ☒

איך "נראה" יחס שקילות?

משפט: יהי R יחס שקילות בקבוצה A. אזי קבוצת מחלקות השקילות של R היא חלוקה (חלוקה) של A.



מחלקת שקילות: $[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$

קבוצת המנה: (קבוצת מחלקות השקילות) $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$