13.2.08 (1)

מתמטיקה בדידה - תרגול

פונקציות

הרכבת פונקציות - $f\in A\to B$ $g\in B\to C$. $g\circ f=\lambda a\in A.\ g(f(a))$ $g\circ f\in A\to C$

דוגמה: $f=\lambda x\in P(\mathbb{R}).\ X\cup\mathbb{N}$

$$f\circ f=\lambda x\in P(\mathbb{R}).\ f(f(x))=\lambda x\in P(\mathbb{R}).\ f(x\cup\mathbb{N})$$

$$=\lambda x\in P(\mathbb{R}).\ (x\cup\mathbb{N})\cup\mathbb{N}\underset{x\cup(\mathbb{N}\cup\mathbb{N})}{=}\lambda x\in P(\mathbb{R}).\ X\cup\mathbb{N}=f\Rightarrow f\circ f=f$$

אסוציאטיביות - $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

כזכור, $f\in A\to B$ הוא חח"ע אם $\forall a_1,a_2\in A.\ f(a_1)=f(a_2)\Leftrightarrow a_1=a_2$

תרגיל: תהיינה $f\in A\to B$, $g\in B\to C$.

I הוכיחו כי אם f חח"ע ו-g חח"ע אז גם $g\circ f$ חח"ע $(g\circ f\in A\to C)$

הוכחה: יהיו $a_1,a_2\in A$

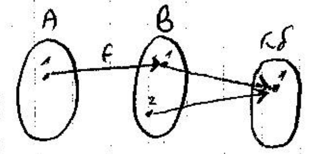
$$(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))$$

$$\underset{\text{חח"ע } g}{\Rightarrow} f(a_1)=f(a_2)\underset{\text{חח"ע } f}{\Rightarrow} a_1=a_2 \quad ☒$$

II הוכיחו כי אם $g\circ f$ חח"ע אז f חח"ע

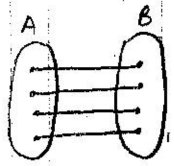
הוכחה: יהיו $a_1,a_2\in A$

$$f(a_1)=f(a_2)\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))\Rightarrow(g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)\underset{\text{חח"ע } g\circ f}{\Rightarrow}a_1=a_2$$



III האם כאשר $g\circ f$ חח"ע, בהכרח מתקיים ש- g חח"ע? לא

$g(1)=g(2)$ לכן g אינה חח"ע. $g\circ f=\{\langle1,1\rangle\}$ חח"ע.



פונקציות שקולות

$f\in A\to B$ שהוא חח"ע ועל נקראת פונקציה שקולה.

משפט: $f\in A\to B$ היא פונקציה שקולה מ-A ל-B אמ"מ קיימת פונקציה $g\in B\to A$ כך ש- $g\circ f=i_A$ ו- $f\circ g=i_B$. פונקציה זו יחידה ומסומנת f^{-1}.

דוגמה: $f\in(0,\infty)\to(0,1)$ $f=\lambda x\in(0,\infty).\ \frac{1}{x+1}$.

ראינו ש-f חח"ע ועל ונראה ש-f פונקציה שקולה בדרך נוספת.

נגדיר - $f^{-1}=\lambda y\in(0,1).\ \frac{1}{y}-1$. עלינו להראות: $f\circ f^{-1}=i_{(0,1)}$, $f^{-1}\circ f=i_{(0,\infty)}$

$\frac{1}{x+1}=y$

$\Downarrow$

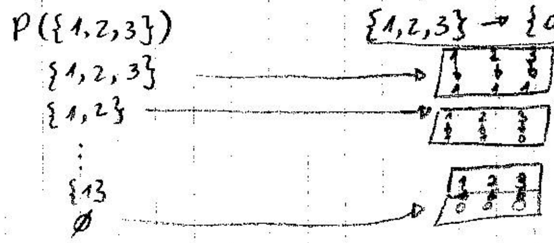
$x=\frac{1}{y}-1$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{1}{\frac{1}{y}-1+1}=y\Rightarrow f\circ f^{-1}=i_{(0,1)}$$

יש להראות גם עבור הכיוון השני. ☒

<u>תרגיל:</u> תהי A קבוצה, הראו פונקציות שקילות בין $P(A)$ ל- $A\to\{0,1\}$.

<u>פתרון:</u> נסתכל על דוגמה - $\{1,2,3\}\to\{0,1\}$



נגדיר פונקציה

$$H \in P(A) \to (A \to \{0,1\})$$

$$H = \lambda x\in P(A).\ \lambda a\in A.\begin{cases}1 & a\in x\\ 0 & a\notin x\end{cases}$$

הפונקציה האופיינית של B -

$$\chi_B^{(A)} = \lambda a\in A.\begin{cases}1 & a\in B\\ 0 & a\notin B\end{cases}$$

נגדיר את הפונקציה ההפכית

$$H^{-1} = \lambda f\in (A\to\{0,1\}).\ \{a\in A \mid f(a)=1\}$$

עלינו להראות $H\circ H^{-1} = i_{A\to\{0,1\}}$, $H^{-1}\circ H = i_{P(A)}$. תהי $g \in A\to\{0,1\}$.

$$(H\circ H^{-1})(g) = H(H^{-1}(g)) = H(\{a\in A \mid g(a)=1\})$$

$$= \lambda a\in A.\begin{cases}1 & a\in\{a\in A\mid g(a)=1\}\\ 0 & a\notin\{a\in A\mid g(a)=1\}\end{cases}$$

$$= \lambda a\in A.\begin{cases}1 & g(a)=1\\ 0 & g(a)=0\end{cases} = \lambda a\in A.\ g(a) = g$$

לכן $H\circ H^{-1} = i_{A\to\{0,1\}}$. יש להראות את הכיוון ההפוך.

<u>שאלה מבחינה:</u>

נתונה הפונקציה $H = \lambda f\in Q\to P(\mathbb{R}).\ \lambda x\in\mathbb{R}.\ \{q\in Q \mid x\in f(q)\}$

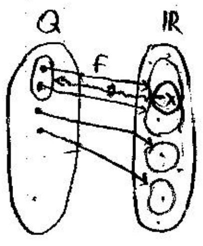
א. הגדר תחום וטווח ל- H

ב. חשבו את $H(\lambda q\in Q.\ \{x\in\mathbb{R} \mid x\le q^2\})$

ג. הראו כי H היא פונקציה שקילות (הציגו פונקציה הפכית H^{-1} ומשם את ההרכבה $H\circ H^{-1}$)

<u>פתרון</u>
<u>א.</u> תחום: $Q\to P(\mathbb{R})$ טווח: $\mathbb{R}\to P(Q)$

לפני שנמשיך ננסה להבין מה הפונקציה עושה:



ב.

$$H(\lambda q\in Q.\{x\in\mathbb{R}\mid x\le q^2\}) = \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid x\in(\lambda q\in Q.\{x\in\mathbb{R}\mid x\le q^2\})(q)\} =$$

$$= \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid x\in\{x\in\mathbb{R}\mid x\le q^2\}\} = \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid x\le q^2\}$$

נשים לב שאכן קיבלנו פונקציה מ-$\mathbb{R}$ לתת קבוצה של Q.

ג.

$$H^{-1}\in(\mathbb{R}\to P(Q))\to(Q\to P(\mathbb{R}))$$

$$H^{-1}=\lambda g\in(\mathbb{R}\to P(Q)).\lambda z\in Q.\{x\in\mathbb{R}\mid z\in g(x)\}$$

נראה כי $H\circ H^{-1}=i_{\mathbb{R}\to P(Q)}$ תהי $h\in\mathbb{R}\to P(Q)$

$$\begin{aligned}(H\circ H^{-1})(h) &= H(H^{-1}(h))\\ &= H(\lambda z\in Q.\{x\in\mathbb{R}\mid z\in h(x)\}) =\\ &= \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid x\in(\lambda z\in Q.\{x\in\mathbb{R}\mid z\in h(x)\})(q)\}\\ &= \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid x\in(\{x\in\mathbb{R}\mid q\in h(x)\})\\ &= \lambda x\in\mathbb{R}.\{q\in Q\mid q\in h(x)\} = \lambda x\in\mathbb{R}.h(x) = h\end{aligned}$$

קיבלנו - $H\circ H^{-1}=i_{\mathbb{R}\to P(Q)}$.

תרגיל

תהי $g\in A\to B$ פונקציית שקילות ותהי H הפונקציה $H=\lambda f\in E_q(A,A).\,g\circ f\circ g^{-1}$

כאשר $E_q(A,A)$ היא קבוצת הפונקציות השקולות מ-A ל-A.

הוכיחו כי H פונקציית שקילות מ-$E_q(A,A)$ ל-$E_q(B,B)$.

$g\circ f\circ g^{-1}\in B\to B$

פתרון נוכיח כי H חח"ע. תהיינה $f_1,f_2\in E_q(A,A)$

$$H(f_1)=H(f_2)\Rightarrow g\circ f_1\circ g^{-1}=g\circ f_2\circ g^{-2}\Rightarrow(g\circ f_1\circ g^{-1})\circ g=(g\circ f_2\circ g^{-1})\circ g$$

$$\Rightarrow g\circ f_1\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{i_A}=g\circ f_2\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{i_A}\Rightarrow g\circ f_1\circ i_A=g\circ f_2\circ i_A$$

$$\Rightarrow g\circ f_1=g\circ f_2\Rightarrow(g^{-1}\circ g)\circ f_1=(g^{-1}\circ g)\circ f_2$$

$$\Rightarrow f_1=f_2$$

נותר להראות ש-H על