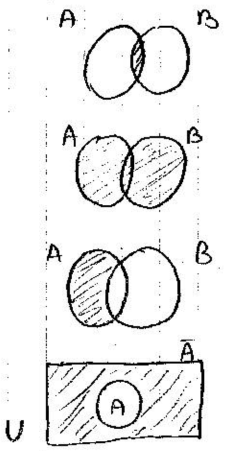
30.1.08

(1)

מתמטיקה בדידה - תרגול

פעולות על קבוצות



1 חיתוך $\forall x\,(x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B)$

2 איחוד $\forall x\,(x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B)$

3 הפרש $\forall x\,(x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B)$

4 משלים $\forall x\,(x\in \bar{A} \Leftrightarrow x\notin A)$

5 הפרש סימטרי $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים

$$\forall C: A\cup C = B\cup C \Leftrightarrow A=B$$

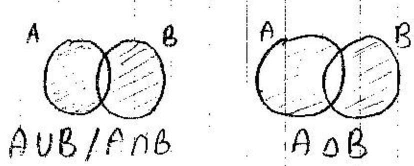
<u>הוכחה:</u> תהיינה A, B קבוצות.

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח $A=B$ תהי C קבוצה ונקבל - $A\cup B \overset{A=B}{=} B\cup C$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $\forall C.\ A\cup C = B\cup C$ בפרט עבור $C=\emptyset$ נקבל:

$A = A\cup\emptyset = B\cup\emptyset = B$ ■

<u>הערה:</u> הדוגמא $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{1,2\}$ אינה דוגמא נגדית כי אנו טוענים <u>שאינו</u> מקיים <u>לכל</u> קבוצה C.
הפסוק - $\forall A\,\forall B\,\forall C.\,(A\cup C = B\cup C \Leftrightarrow A=B)$ שקר



<u>טענה:</u> לכל A, B $\quad A\triangle B = (A\cup B / A\cap B)$

<u>הוכחה:</u> בעזרת טבלת אמת, עלינו להראות:

$$\forall x.\ x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \Leftrightarrow x\in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$$\forall x\ (x\in A\setminus B)\vee(x\in B\setminus A) \Leftrightarrow x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B$$

$$\forall x.\,[(x\in A \vee x\notin B)\vee(x\in B \wedge x\notin A)] \Leftrightarrow [(x\in A \vee x\in B)\wedge \neg(x\in A\wedge x\in B)]$$

נסמן $P=x\in A$, $Q=x\in B$ ונראה כי הפסוק הוא טאוטולוגיה:

$$[(P\wedge \neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)] \Leftrightarrow [(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)]$$

ניתן לעשות זאת באמצעות טבלת אמת.

<u>הוכחה ב:</u> בעזרת הכלה דו-כיוונית $\quad (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\boxed{\subseteq}$ $x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = x\in A\setminus B \vee x\in B\setminus A \Rightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Rightarrow (x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B)\vee(x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B) \overset{P\vee P\equiv P}{\Rightarrow} (x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B)$

$\Rightarrow x\in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\boxed{\supseteq}$ תרגיל. ■

30.1.08

(2)

מתמטיקה בדידה - תרגול

הוכחה 3 נזכיר בכללים הבאים -

דה מורגן:

$$\overline{A\cup B}\equiv \bar{A}\cap\bar{B}$$
$$\overline{A\cap B}\equiv \bar{A}\cup\bar{B}$$

דיסטריבוטיביות

$$A\cap(B\cup C)\equiv(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)\equiv(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

אסוציאטיביות:

$$A\cup(B\cup C)\equiv(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)\equiv(A\cap B)\cap C$$

נוכיח באמצעות שקילויות:

$$A\triangle B\equiv(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\equiv(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\underset{\text{דיסטריבוטיביות}}{\equiv}((A\cap\bar{B})\cup B)\cap((A\cap\bar{B})\cup\bar{A})$$

$$\equiv(A\cup B)\cap\underbrace{(B\cup\bar{B})}_{\text{קבוצת כל האיברים ולכן זה משלים של החיתוך}}\cap\underbrace{(A\cup\bar{A})}_{\text{כנ"ל } U}\cap(\bar{B}\cup\bar{A})=(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\equiv(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\equiv(A\cup B)/(A\cap B)$$

מש"ל ∎

כלל β

$$F=2\in\mathbb{R}\wedge 2^2>9\ \Leftarrow\ 2\overset{?}{\in}\{x\in\mathbb{R}\mid\underbrace{x^2>9}_{\text{טווח הקשירה}}\}$$

כלומר, כלליות כלל β אומר: $\{...\}$ - זה האופרטור

$$\underbrace{\Psi(t/x)}_{\text{הצבה של } t \text{ במקום } x}\wedge t\in S\iff t\in\{x\in S\mid\Psi\}$$

תרגיל: האם $4\in\{x\in\mathbb{R}\mid\underbrace{\forall y.\,(y\in\{x\in\mathbb{N}^+\mid\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\})\to(y>x)}_{\text{טווח הקשירה}}\}$

פתרון: עלינו לבדוק האם - $(4\in\mathbb{R})$

$$?\quad\forall y\,(y\in\{x\in\mathbb{N}^+\mid\tfrac{1}{x}<\tfrac{1}{2}\})\to(y>4)$$

$$\forall y\,(y\in\{x\in\mathbb{N}^+\mid x>2\})\to(y>4)$$

הפסוק שקרי, נבחר $y=3$ ונקבל $T\to F$ שזהו שקר ולכן 4 אינו בקבוצה.

קבוצת החזקה

$$P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$$

דוגמאות:

$$P(\emptyset)=\{\emptyset\}\qquad P(\{1,2\})=\{\{1,2\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$$

באופן כללי

$$\forall A.\ \emptyset\in P(A)$$
$$\forall A.\ A\in P(A)$$

אם A קבוצה סופית ומתקיים שמספר האיברים בקבוצה הוא n אז $|P(A)|=2^n$.

טענה: $\forall A.\forall B.\,[A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)]$

הוכחה: תהיינה קבוצות B,A

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $A\subseteq B$

$$X\in P(A)\Rightarrow X\subseteq A\overset{\text{מהנחה}}{\subseteq}B\Rightarrow X\subseteq B\Rightarrow X\in P(B)$$

המשך..

$\Leftarrow$ נניח ש $P(A)\subseteq P(B)$

$$A\in P(A)\overset{\text{הנחה}}{\subseteq} P(B) \Rightarrow A\in P(B) \overset{\text{עפ"י הגדרת קבוצת החזקה}}{\Rightarrow} A\subseteq B.\ \blacksquare$$

תרגיל: האם $\forall A\,\forall B\,[A\in B \Leftrightarrow P(A)\in B(P)]$?

פתרון: לא. נקח $A=\{1\}$ $B=\{\{1\}\}$

$\Leftarrow$ $P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$ $\quad P(B)=\{\varnothing,\{\{1\}\}\}$

$A\in B$ אך $P(A)\notin P(B)$

מכפלה קרטזית

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A \wedge b\in B\}$$

$$\{1,2\}\times\{1\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

$$\{1,2\}\times\varnothing=\varnothing\ ;\ \{1,2\}\times\{\varnothing\}=\{\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 2,\varnothing\rangle\}$$

היטל: $\pi_1(\langle a,b\rangle)=a$ $\qquad \pi_2(\langle a,b\rangle)=b$

אם A, B סופיות אז $|A\times B|=|A|\times|B|$

האם מכפלה קרטזית קומוטטיבית? לא

מתי כן?

$$\forall A\,\forall B\,(A\times B=B\times A \Leftrightarrow (A=B)\vee(A=\varnothing)\vee(A=\varnothing))$$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח $A=\varnothing \vee A=B \vee B=\varnothing$ כאשר

$A=B$ $\qquad A\times B=A\times A=B\times A$

$A=\varnothing$ $\qquad A\times B=\varnothing=B\times A$

$B=\varnothing$ $\qquad$ "

$\Rightarrow$ נניח $A\times B=B\times A$ נוכיח: $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$.
כאשר A או B ריקה מתקיים בבירור. נראה שכאשר $A\neq\varnothing \wedge B\neq\varnothing$ אז $A=B$.

$B\neq\varnothing$ פירושו שקיים b כך ש $b\in B$.

נראה $A\subseteq B$:

$$x\in A \Rightarrow \langle x,b\rangle\in A\times B=B\times A \Rightarrow \langle x,b\rangle\in B\times A \Rightarrow x\in B$$

באופן דומה $B\subseteq A$ ולכן $A=B$ כנ"ל. $\blacksquare$

טענה:

$$\forall A,B,C\quad (A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$$

הוכחה: תהיינה A, B, C קבוצות

$$\langle x,y\rangle\in(A\times C)\setminus(B\times C) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times C)\wedge\langle x,y\rangle\notin(B\times C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C) \Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$$

30.1.08 (4)

מתמטיקה בדידה - תרגול

המשך...

$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C \wedge x\notin B) \vee \underbrace{(x\in A \wedge y\in C \wedge y\notin C)}_{F} \overset{P\vee F\equiv P}{\Leftrightarrow} (x\in A \wedge x\notin B \wedge y\in C)$$

דיסטריבוטיביות

$$\Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (A\setminus B)\times C \quad \blacksquare$$

<u>תרגיל</u> הוכיחו כי לכל אוסף קבוצות $B_1, B_2, \ldots B_n$ $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$(A_1\cap A_2 \cap\ldots\cap A_n)\,\Delta\,(B_1\cap B_2 \ldots\cap B_n) \subseteq (A_1\Delta B_1)\cup\ldots\cup(A_n\Delta B_n)$$

<u>הערה:</u> ניתן לכתוב

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)\Delta\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A_i\Delta B_i)$$

<u>הוכחה:</u> יהי $x\in\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)\Delta\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right)$ $\quad (A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A))$

נבחין בין שני מקרים:

I $\quad x\in\bigcap_{i=1}^n A_i \wedge x\notin\bigcap_{i=1}^n B \Leftarrow \underset{(1\le i\le n)}{\forall i.\, x\in A_i} \wedge \exists i.\, x\notin B_i$

נסמן ב i_0 את זה שמקיים $x\notin B_{i_0}$ ובפרט גם $x\in A_{i_0} \Rightarrow x\in A_{i_0}\Delta B_{i_0} \Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^n (A_i\Delta B_i)$

II $\quad x\notin\bigcap_{i=1}^n A_i \wedge x\in\bigcap_{i=1}^n B$. הוכחה באופן דומה. $\blacksquare$