מתמטיקה בדידה - תרגול 2   31.10.07 (1)

תזכורת:

לוגיקה - קשרים $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

כללי דה-מורגן: $\neg(A\wedge B)\equiv \neg A\vee \neg B$, $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$

אסוציאטיביות $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$

$(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$

דיסטריבוטיביות $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge B)$

$A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$\neg(\neg A)\equiv A$.

משפט: כל פסוק ניתן להביע ע"י הקשרים $\wedge,\neg$. (כמו גם עבור $\vee$ ו-$\neg$).
למשל הפסוק $A\rightarrow B$ ניתן לכתיבה $\neg A\vee B$.

תרגיל: נגדיר קשר Δ (הפרש סימטרי) כך: $A\Delta B=(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

רוצים ש-Δ יהיה T רק כאשר בדיוק אחד משני הפסוקים אמיתי
בטאו את $A\Delta B$ ע"י הקשרים $\wedge,\neg$ בלבד.

A	B	AΔB
T	F	T
T	T	F
F	T	F
F	F	T

פתרון: $A\Delta B=(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\underset{\neg(\neg P)=P}{\equiv}\neg(\neg((A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)))$

$\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv}\neg(\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg A\wedge B))$

טענה: לכל $n\geq 2$ אם, $\neg(A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_n)\equiv\neg A_1\vee\neg A_2\vee\dots\vee\neg A_n$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה, הטענה נכונה עבור $n=2$ כפי שנאמר בכללי דה מורגן.
נראה שהטענה נכונה עבור P_k אז נכונה גם ל-P_{k+1}:
מניחים:

$\neg(A_1\wedge A_2\wedge\dots A_k)\equiv\neg A_1\vee\neg A_2\vee\dots\vee\neg A_k$

$\neg(A_1\wedge A_2\wedge\dots A_k\wedge A_{k+1})\underset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv}\neg((A_1\wedge A_2\wedge\dots A_k)\wedge A_{k+1})$

$\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv}\neg(A_1\wedge A_2\wedge\dots A_k)\vee\neg A_{k+1}\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\equiv}\neg A_1\vee\neg A_2\vee\dots\vee\neg A_k\vee\neg A_{k+1}$ ∎

איך מוכיחים?

$\mathbb{R}$ - קבוצת המספרים הממשיים

תרגיל: נתון הפסוק $\forall x\in\mathbb{R}.[\underbrace{(x\leq 3)\vee(\exists y\in\mathbb{R}.\ x=1+y^2)}_{(*)}]$

(1) האם הפסוק אמיתי? כן.

הוכחה: יהי x - ממשי, אם $x\leq 3$ אז ל-$(*)$ ערך T (כי החלק השמאלי של הקשר $\vee$ הוא אמיתי). אם $3<x$: נראה כי ל-$\exists y\in\mathbb{R}.\ x=1+y^2$ ערך T.
נקח $y=\sqrt{x-1}$ (מוגדר כי $x>3$) ולכן $1+y^2=1+(\sqrt{x-1})^2=x$
ולכן קיים y כנדרש.
הוכחנו כי $(*)$ לכל x ממשי ולכן הפסוק אמיתי. ∎

31.10.07 ②

מתמטיקה בדידה - תרגול 2

(ב) כתבו את שלילת הפסוק ללא קשר השלילה ¬.

<u>כללים:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}&\neg(\forall x.P(x)) \equiv \exists x.\neg P(x)\\ &\neg(\exists x.P(x)) \equiv \forall x.\neg P(x)\end{aligned}}$$

(אם רוצים לשלול משהו שנכון עבור כל x, מספיק להראות שקיים x לא מקיים את הדרוש.)

$$\neg\left(\forall x\in\mathbb{R}.\left[(x\le 3)\vee(\exists y\in\mathbb{R}.\ x=1+y^2)\right]\right) \equiv \exists x\in\mathbb{R}\ \neg\left[(x\le 3)\vee(\exists y\in\mathbb{R}.\ x=1+y^2)\right]$$

$$\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \exists x\in\mathbb{R}\left[\neg(x\le 3)\wedge\neg(\exists y\in\mathbb{R}.\ x=1+y^2)\right] \equiv \exists x\in\mathbb{R}\left[(x>3)\wedge(\forall y\in\mathbb{R}.\ \neg(x=1+y^2))\right]$$

$$\equiv \exists x\in\mathbb{R}\left[(x>3)\wedge(\forall y\in\mathbb{R}.\ x\ne 1+y^2)\right].$$

זהו פסוק שקרי כיוון שהוא שלילה של פסוק אמת.

<u>הערות:</u> • כדאי לזכור שוויונים: $\neg(\alpha\to\beta)\equiv\neg(\neg\alpha\vee\beta)\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv}\alpha\wedge\neg\beta$

• נשים לב שהסימנים המשתנים (במקרה שלנו ממשיים) אינו משתנה בשלילת הפסוק.

<u>תרגול:</u> הוכיחו או הפריכו

(1) $\forall y\in\mathbb{R}.\exists x\in\mathbb{R}.\ x+x=y$

הפסוק נכון. <u>הוכחה:</u> יהי y ממשי. צריך להראות $\exists x\in\mathbb{R}.\ x+x=y$
נבחר את $x=\frac{1}{2}y$ ואכן מתקיים

$x+y=2x=2\cdot\frac{1}{2}y=y$.

$\forall y\in\mathbb{N}.\exists x\in\mathbb{N}.\ x+x=y$ (N - קבוצת המספרים הטבעיים, כולל השלמים החיוביים)

הפסוק <u>אינו נכון.</u> נכתוב את שלילתו ונוכיח אותה.

$$\neg(\forall y\in\mathbb{N}.\exists x\in\mathbb{N}.\ x+x=y)\equiv\exists y\in\mathbb{N}.\neg(\exists x\in\mathbb{N}.\ x+x=y)$$

$$\equiv\exists y\in\mathbb{N}.\ \forall x\in\mathbb{N}.\ x+x\ne y$$

<u>הוכחה:</u> נבחר $y=7$. נוכיח שלכל מספר טבעי x, $x+x\ne 7$ $(\forall x\in\mathbb{N}.\ x+x\ne 7)$
יהי x טבעי. אזי $x+x=2x$ הוא מספר זוגי ולכן הוא שונה מ- 7 האי זוגי.

<u>תרגול:</u> (א) האם הפסוק $(\forall x.P(x))\wedge(\forall x.Q(x))$ ① שקול לפסוק $\forall x\ P(x)\wedge Q(x)$ ② ?

(ב) האם הפסוק $(\exists x\ P(x))\wedge(\exists x\ Q(x))$ שקול לפסוק $\exists x\ P(x)\wedge Q(x)$?

<u>פתרון:</u> (א) כן. <u>הוכחה:</u> צריך להראות שאם ①=T אז ②=T ושאם ②=T אז ①=T.
נוכיח שאם ①=T אז ②=T (כיוון השני משאיר לכם כתרגיל).
נניח בשלילה ש ①=T וגם ②=F.

$(\forall x\ P(x))\wedge(\forall x\ Q(x))=T$ (*) $\neg(\forall x.\ P(x)\wedge Q(x))=F$

31.10.07 (3)

מתמטיקה בדידה - תרגול 2

$$T = \neg(\forall x. P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x. \neg(P(x) \wedge Q(x)) \underset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \exists x. \neg P(x) \vee \neg Q(x)$$

לכן קיים x_0 שמקיים $\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0)$

ונתבונן על 2 מקרים:

I $\neg P(x_0)=T$ ⇐ $P(x_0)=F$ זה בסתירה לכך ש- $\forall x P(x)=T$ (כפי שנובע מ-(*)).

II $\neg Q(x_0)=T$ ⇐ $Q(x_0)=F$ זה בסתירה לכך ש- $\forall x Q(x)=T$ (כפי שנובע מ-(*)).

קיבלנו סתירה להנחה, כנדרש. ▨ [השלימו את הוכחת הכיוון השני].

(ב) הפסוקים אינם שקולים לוגית. נבחר - עבור $P(x) \equiv x<0$, $Q(x) \equiv x>0$ (טיפוס המשתנים שלמים) ונשים לב

$$\exists x. ((x<0) \wedge (x>0)) = F$$

אבל $(\exists x. (x<0)) \wedge (\exists x. x>0) = T \wedge T = T$ ולכן אינם שקולים. $\mathbb{Z}$ קבוצת השלמים

<u>תרגול</u> הוכיחו או הפריכו $\forall x \in \mathbb{R}. \exists k \in \mathbb{Z}. [\underbrace{(k \le x) \wedge (\forall l \in \mathbb{Z}. (l>k \to l>x))}_{(*)}]$

<u>פתרון:</u> הטענה נכונה. <u>הוכחה:</u> יהי x ממשי. (נבחר k - השלם הגדול ביותר שאינו על x. ($k=\lfloor x \rfloor$). נשים לב: $k \le x < k+1$

נוכיח את (*): $(k \le x)=T$

יהי l שלם. נוכיח ש $(l>k) \to (l>x)$ נניח ש $l>k$ ולכן $l \ge k+1$ (כיוון שלמים)

$l \ge k+1 > x$ ⇐ $l>x$ כנדרש ▨

(*) עד שהשביתה תסתיים אין יותר תרגולים.

(*) את פתרון תרגיל 2, לסיים בבית של יש בחומר, קומה 1.