26.3.08 (1)

מתמטיקה בדידה - תרגול

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

דוגמה:
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

תרגיל: כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה לסדרה a_n כאשר a_n מספר הדרכים לחלק n אנשים לזוגות ויחידים.

דוגמה: $n=3$, ①②③ , (12)③ , ①(23) , (1③)② , $a_3 = 4$

פתרון: אם אדם מספר 1 לבד אז מספר האפשרויות a_{n-1}.
אם אדם מספר 1 נמצא בזוג אז מספר האפשרויות $(n-1)\cdot a_{n-2}$.

לכן -
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

הערה: נשים לב שהמקדמים של נוסחה זו אינם קבועים.

תרגיל: כתבו נוסחאות נסיגה ותנאי התחלה למס' הסדרות באורך n מעל $\{0,1\}$ כך שלא מופיע הרצף - א. 110 ב. 101.

פתרון: (א)
$$a_n = \begin{cases} 0\underbrace{\quad\quad}_{\text{סדרה חוקית באורך } n-1} & a_{n-1} \\ 10\underbrace{\quad\quad}_{\text{סדרה חוקית באורך } n-2} & a_{n-2} \\ 1111\ldots11 & 1 \end{cases}$$

בסה"כ:
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \end{cases}$$

(ב)
$$a_n = \begin{cases} 0\underbrace{\quad\quad}_{n-1} & a_{n-1} \\ 100\underbrace{\quad\quad}_{n-3} & a_{n-3} \\ 1100\underbrace{\quad\quad}_{n-4} & a_{n-4} \\ 11100\underbrace{\quad\quad} & a_{n-5} \\ 1111 & \\ \vdots & \\ 111\ldots100\underbrace{\quad} & a_2 \\ 111\ldots1100\underbrace{\quad} & a_1 \\ 111\ldots11100 & a_0 \\ 111\ldots1111\underbrace{\quad} & 2 \end{cases}$$

מתמטיקה בדידה - תרגול

קיבלנו:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 + 2$$

נציב בביטוי זה $n-1$:

$$a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 + 2$$

נחסר בין המשוואות:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-2}$$

סה"כ:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

תרגיל: מצאו את מספר המילים בנות 5 אותיות מתוך A,B,C שאין בהן את המחרוזות AA ו- BC.

פתרון: נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות באורך n שמקיימות את הדרישה. רוצים לחשב: $a_5 = ?$.

$$a_n = \begin{cases} C\,\underbrace{\qquad}_{\text{מחרוזת חוקית באורך } n-1} & a_{n-1} \\ B\,\underbrace{\qquad}_{\text{מחרוזת חוקית באורך } n-1 \text{ שלא מתחילה ב-}C} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ A\,C\,\underbrace{\qquad}_{\text{מחרוזת חוקית באורך } n-2} & a_{n-2} \\ A\,B\,\underbrace{\qquad}_{\text{מחרוזת חוקית באורך } n-2 \text{ שלא מתחילה ב-}C} & a_{n-2} - a_{n-3} \end{cases}$$

פחות המחרוזות באורך n-1 שמתחילות ב-C

לפי הנוסחה:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = 7 \end{cases}$$

$a_3 = 2\cdot 7 + 3 - 1 = 16 \qquad (n=3)$

$a_4 = 2\cdot 16 + 7 - 3 = 36$

$a_5 = 2\cdot 36 + 16 - 7 = \boxed{81}$

תרגיל: מצאו ביטוי סגור ל- a_n כאשר

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{a+1} - 6a_n \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \end{cases}$$

פתרון: הפתרון צריך להיות מהצורה x^n. (נציב בה) הנוסחה:

$$x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n \quad /:x^n$$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftarrow$ פולינום אופייני

$(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2,3$

הפתרונות הן מהצורה:

$$\boxed{a_n = \alpha 2^n + \beta\cdot 3^n}$$

20.3.08

①

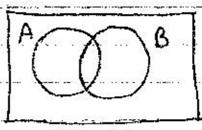
מתמטיקה בדידה - תרגול

נציב את תנאי ההתחלה:

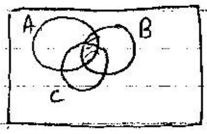
$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha + \beta \\ a_1 = 1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}}$$

<u>הפתרון:</u> $\boxed{a_n = 2^{n-1} - 3^n}$

עקרון ההכלה וההדחה (הפרדה)

U


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

U


$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>באופן כללי</u>

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

<u>הערה:</u> אם רוצים לחשב $\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right|$ נעשה זאת כך:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

<u>מדוע הנוסחה נכונה?</u> אם x לא בשום אחת מהקבוצות A_i - הוא "נספר" ב- $|U|$ אבל לא בשאר האיברים.

אם x נמצא ב- r מהקבוצות - מספר הפעמים ש- x נספר -

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \binom{r}{4} - \ldots (-1)^r \binom{r}{r} = (1-1)^r = 0$$

<u>תרגיל:</u> מה מספר הסידורים של 9 כדורים: 3 אדומים, 3 כחולים ו- 3 ירוקים כך שאין 3 סמוכים באותו הצבע?

<u>פתרון:</u> נגדיר A - קבוצת הסידורים בהן 3 כדורים אדומים סמוכים

" " " " כחולים " B -

<u>פתרון:</u> נגדיר A - קבוצת הסידורים בהן 3 כדורים אדומים סמוכים

" " " " כחולים " B -

" " " " ירוקים " C -

רוצים לחשב: $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$

$$|U| = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6^3}$$

$$|A| = \frac{7!}{3! \cdot 3!} = |B| = |C|$$

$$|A \cap B| = \frac{5!}{3!} = |A \cap C| = |B \cap C|$$

$$|A \cap B \cap C| = 3!$$

עפ"י עקרון ההכלה וההדחה

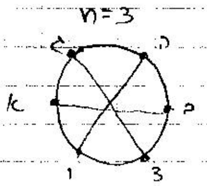
$$\boxed{|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = \frac{9!}{6^3} - 3 \cdot \frac{7!}{6^2} + 3 \cdot \frac{5!}{6} - 3!}$$

26.3.08 (4)

מתמטיקה בדידה - תרגול

<u>תרגיל ממבחן:</u>

2n סטודנטים יושבים בקרוסלה עם הפנים קדימה. כל אחד מהם רואה מולו בדיוק
סטודנט אחד. בכמה אופנים הם יכולים להחליף מקומות כך שאף אחד מהם לא יראה
סטודנט <u>חדש</u> מולו אם: (1) המקומות מסומנים.
(2) המקומות אינם מסומנים.



<u>פתרון:</u> לכל $1 \le i \le n$: נגדיר P_i - קבוצת הסידורים בקרוסלה
בהם הזוג ה-i נמצא "אחד מול השני". רוצים לחשב:
$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{P}_i\right|$ נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.

$$|U| = (2n)!$$

$$|P_i| = \underbrace{(2n)}_{\text{מספר המקומות שבהם הזוג הראשון יושב}} \cdot \underbrace{(2n-2)!}_{\text{סידור שאר הסטודנטים במעגל}}$$

$$(i\neq j)\ |P_i \cap P_j| = \underbrace{(2n)}_{\text{בחירת הכיסא של הזוג הראשון}} \cdot \underbrace{(2n-2)}_{\text{כיסא של הזוג השני}} \cdot \underbrace{(2n-4)!}_{\text{סידור יתר הסטודנטים}} = 2^2 \cdot n(n-1) \cdot (2n-4)!$$

$$|P_i \cap P_j \cap P_k| = \underbrace{(2n)}_{\text{זוג ראשון}} \cdot \underbrace{(2n-2)}_{\text{שני}} \underbrace{(2n-4)}_{\text{שלישי}} \cdot \underbrace{(2n-6)!}_{\text{יתר הסטודנטים}} = 2^3 n(n-1)(n-2)(2n-6)!$$

$\vdots$

<u>באופן כללי:</u>

$$|P_1 \cap P_2 \cap \dots P_l| = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots (2n-2(l-1)) \cdot (2n-2l)!$$
$$= 2^l \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(l-1)) \cdot (2n-2l)!$$
$$\boxed{= 2^l \cdot \frac{n!}{(n-l)!} \cdot (2n-2l)!}$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{P}_i\right| = (2n)! - n \cdot (2n)(2n-2)! + \binom{n}{2} 2^2 \cdot n(n-1)(2n-4)! - \binom{n}{3} 2^3 \cdot n(n-1)(n-2)(2n-6)! + \dots =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} 2^l \cdot \frac{n!}{(n-l)!} \cdot (2n-2l)! \cdot (-1)^l = \boxed{\sum_{l=0}^{n} (-2)^l \binom{n}{l} \cdot \frac{n!}{(n-l)!} (2n-2l)!}$$

(2) כל סידור כאשר המקומות אינם מסומנים נספר בסעיף (1) 2n פעמים ולכן התשובה
היא $\frac{1}{2n}$ מוכפל בתשובה הנ"ל.

<u>שיעורי תגבור</u>

9.4.2008	16^{00}	אולם כ	(שני)
16.4.2008	16^{00}	אולם מג	(יוסי)