מתמטיקה בדידה - תרגול 12.3.08 (1)

קומבינטוריקה סופית

<u>עקרון הכפל</u> - אם בתהליך יש בכל שלב i, k_i אפשרויות ($1 \le i < l$) אז מספר האפשרויות הכולל הוא $k_1 \cdot k_2 \cdots k_l$

<u>דוגמה:</u> כמה פונקציות f מהקבוצה לעצמה מקיימות $\forall x \in A.\ f(x) \neq x$?

$$(n-1)(n-1)\cdots = (n-1)^n$$

לכל - הקבוצה חוץ מ-1

<u>תמורות:</u> בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים בשורה?

$$n\cdot(n-1)\cdots 1 = n! = E(n)$$

בחירת אדם למקום הראשון, אחר מקום לאדם הבא...

<u>דוגמה:</u> קיימות $5!$ תמורות לאיברי $\{A,B,C,D,E\}$. בכמה מהן האותיות C,B סמוכות?

בשלב הראשון נסדר בשורה את $A,D,E,\binom{B}{C}$ - $4!$

בשלב השני נסדר את B,C (נבחר BC או CB) $2!$

$\boxed{\text{סה"כ } 4!\cdot 2}$

<u>צירופים</u> בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך קבוצה בגודל n?

(ללא חשיבות לסדר האיברים)

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

* כיוון שהכוונה כאן היא רק לאיברים שנבחרו ואין חשיבות לסדר שלהם בבחירה, עלינו לחלק את התמונה ב-$k!$ (מספר האיברים שבחרנו)

<u>תרגול:</u> נתונה טבלה ובה n שורות ו-$2n$ עמודות. בכל משבצת ניתן לסמן X או להשאיר אותה ריקה.

n

א. כמה טבלאות כאלה קיימות? $\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{\text{קיימים } 2n^2 \text{ תאים}} = 2^{2n^2}$

ב. בכמה מהטבלאות יש X אחד בדיוק בכל עמודה? n^{2n} (בכל עמודה יש לנו n אפשרויות לבחור למקם את ה-X וקיימות $2n$ עמודות).

ג. בכמה מהטבלאות יש 2 X בדיוק בכל שורה? $\binom{2n}{2}^n$

* כאן אנו בודקים עבור כל שורה היכן למקם את ה-X (בעלות 2 מקומות) נשתמש בצירופים כיוון שהסדר בו בחרנו למקם את ה-X-ים אינו חשוב.

ד. בכמה מהטבלאות יש X אחד בדיוק בכל עמודה ו-2 X-ים בכל שורה?

<u>פתרון 1</u>

$$\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

בוחרים 2 מקומות לשורה הראשונה

2 מקומות לשורה השניה, בשורה זו יש 2 עמודות פחות לבחור מהן

כך הלאה.

מתמטיקה בדידה - תרגול

פתרון 2: הבעיה שקולה לבעיה - "בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $1,2,\ldots,n,1,2,\ldots,n$ בשורה?

$$\frac{(2n)!}{2!\cdot 2!\cdots 2!}=\frac{(2n)!}{2^n}$$

סידור של 2n איברים שונים בשורה. הבעיה שלנו היא שלא כל האיברים שונים לגמרי.

לכן, עבור כל איבר מאיברים הלבים נחלק את האפשרויות לסדר אותם בשורה.

נוודא ששני הפתרונות זהים:

$$\frac{(2n)!}{2!\,\cancel{(2n-2)!}}\cdot\frac{\cancel{(2n-2)!}}{2!\,\cancel{(2n-4)!}}\cdots\frac{\cancel{4!}}{2!\cdot\cancel{2!}}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{(2n)!}{2^n}$$

תמורות במעגל - בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים במעגל?

פתרון 1: ⊛ ההבדל בין סידור במעגל הוא שאנחנו לא מבחינים בין איבר היכן הוא נמצא באופן אבסולוטי אלא ביחס לאחרים בלבד. מאחר שנבחר בן אדם ראשון יש לנו נקודת ייחוס ולכן לאחר מכן נוכל להתייחס כמו סידור בשורה.

נבחר מקום לאדם אחד, שיהווה נקודת ייחוס ולאחר מכן נסדר את השאר בשורה. לכן: $(n-1)!$

פתרון 2: ⊛ אם ניקח סידור של שורה, ונבקש מהראשון לעבור לסוף (כך) למעשה את אותו מעגל, ניתן לעשות זאת n פעמים. לכן נחלק את האפשרויות לסדר בשורה ב-n.

ניתן לסדר n אנשים בשורה ב-$n!$ אפשרויות ולכל סידור במעגל יש n סידורים בשורה שמתאימים לו. בסה"כ $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

באופן כללי יותר: אם R הוא יחס שקילות בקבוצה סופית A ועוצמת כל מחלקת שקילות היא r אזי $|A/R|=\frac{|A|}{r}$ (העוצמות של מחלקות השקילות שוות).

חלוקת כדורים לתאים

בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים ל-k תאים?

	כדורים שונים	כדורים זהים
בכל תא לכל היותר כדור אחד	$\binom{n}{k}\cdot k!=\frac{n!}{(n-k)!}$ ⊛	$\binom{n}{k}$ ⊛
ללא הגבלה	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$

⊛ נבחר פשוט k תאים שבהם יהיו כדורים, כל הכדורים זהים לכן יש חשיבות רק באיזה תא יש כדור ובאיזה אין.

⊛ קודם כל נבחר באיזה תאים יהיו כדורים, אך כיוון שיש חשיבות איזה כדור (מהו הסדר), נכפיל במספר האפשרויות לסדר k כדורים.

oo|oo|oo

$n=4$

$\binom{n+k-1}{k}$

• כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $x+y+z=n$? מספר הדרכים לחלק n כדורים זהים לשלושה תאים. $\binom{n+2}{2}=\binom{n+3-1}{3-1}$

קומבינטוריקה בסיסית - תרגול

• כמה פתרונות בטבעיים יש לאי השוויון $x+y+z \leq n$?

כמספר הדרכים לחלק n כדורים זהים ל-4 תאים (התא הרביעי יקבל את השארית n-...).
לכן $\binom{n+4-1}{4-1}$

__תרגיל__ בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים ממלאי גדול ב-5 צבעים ל-20 תאים כך שאין תא ריק ואין תא עם כדורים שוני-צבע?

__פתרון__ נסתכל על שני השלבים

I נבחר צבע לכל תא: 5^{20}

II נחלק 100 כדורים __זהים__ (כי בשלב הקודם נבחר הצבע) ל-20 תאים כך שאין אף תא ריק. נשים כדור בכל תא ונותר עם 80 כדורים זהים ל-20 תאים. $\binom{80+20-1}{20-1}$

לפי עיקרון הכפל $5^{20}\cdot\binom{99}{19}$

__תרגיל__ בכמה תתי קבוצות בנות 20 איברים של $\{1,2,\dots,100\}$ ההפרש בין כל שני איברים:

א. מתחלק ב-2 ללא שארית.
ב. לפחות 2.

__פתרון:__ בסה"כ יש 2^{100} תתי קבוצות לקבוצה. $\binom{100}{20}$ בעוצמה 20.

א. עלינו לשאול בכמה תתי קבוצות בעוצמה 20 יש לכל האיברים אותה זוגיות (כולם זוגיים או כולם אי-זוגיים):
$\binom{50}{20}+\binom{50}{20}=2\cdot\binom{50}{20}$

ב. ניתן להתאים לכל תת קבוצה של $\{1,2,\dots,100\}$ מחרוזת באורך 100 מעל $\{0,1\}$ כך שבמקום ה-k נשים 1 אם k בקבוצה ו-0 אחרת.

$\{1,3,4\}$ נייצג את הקבוצה ע"י רצף של 1 ו-0 המציינים האם המספר נכנס או לא לקבוצה

$\underbrace{1011000\dots0}_{100}$

נסתכל על השאלה השקולה - כמה מחרוזות באורך 100 מעל $\{0,1\}$ עם 20 1-ים שאין שני 1-ים רצופים?

בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים (אפסים) ל-21 תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד (מלבד התא הראשון והאחרון)?

נשים כדור בכל אחד מהתאים מלבד הראשון והאחרון.
נותר לנו לחלק $80-19=61$ כדורים זהים ל-21 תאים
ומספר האפשרויות לעשות זאת

$$\binom{61-21-1}{21-1}=\binom{81}{20}$$

12.3.08 (4)

מתמטיקה בדידה - תרגול

הוכחת זהויות

<u>טענה</u>: לכל n טבעי, $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n\cdot 2^{n-1}$

<u>הוכחה</u>: נסתכל על הבעיה הקומבינטורית הבאה: בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה עם יו"ר מתוך קבוצה של n אנשים?

מצד אחד, מס' הדרכים לבחור ועדה בגודל i עם יו"ר היא $\binom{n}{i} i$ ולכן מספר האפשרויות הכולל הוא $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$.

מצד שני, ניתן לפתור זאת ע"פ השלבים הבאים:

I נבחר יו"ר לועדה ← n

II נבחר לכל אחד מהם האם בועדה או לא ← 2^{n-1} (היו"ר בטוח בועדה)

$n\cdot 2^{n-1}$

בסה"כ עולה הדרוש

הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k\cdot b^{n-k}$$

למשל, אם $a=b=1$: $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ← השוויון לא מפתיע כי בפועל שניהם סופרים את [illegible]

למשל, אם $a=-1$ $b=1$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \Rightarrow 0 = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ זוגי}}}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ אי זוגי}}}\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ זוגי}}}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ אי זוגי}}}\binom{n}{k} \Rightarrow$$

לכן, מספר תתי הקבוצות בגודל זוגי של $\{1,\dots,n\}$ שווה למספר תתי הקבוצות בגודל אי זוגי.

<u>תרגיל</u>

תהא $A=\{1,2,\dots,n\}$ ונגדיר יחס R על $P(A)$ כך:

$$\forall x,y\in P(A)\ .\ xRy \iff X\subseteq Y,\ X\neq Y$$

מהו $|R|$?

<u>דוגמה</u>: $\langle\emptyset,\{1\}\rangle\in R$, $\langle\{1,2\},\{1,2,3\}\rangle\in R$

<u>פתרון 1</u>: תהא $Y\in P(A)$ קבוצה בעוצמה k. קיימות (2^k-1) קבוצות X המקיימות $\langle X,Y\rangle\in R$. עלינו לסכם כעת על כל הקבוצות. קיימות $\binom{n}{k}$ תתי קבוצות של A בעוצמה k ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(2^k-1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (2+1)^n - \underset{a=b=1}{2^n} = \underline{\underline{3^n-2^n}}$$

12.3.08

מתמטיקה בדידה - תרגיל

<u>פתרון ב:</u> לכל איבר ב-A יש 3 אפשרויות כדי שזוג $<X,Y>$ יהיה ביחס:

① $b\in X \wedge b\in Y$

② $b\notin X \wedge b\notin Y$

③ $b\notin X \wedge b\in Y$ (כי $X\subset Y$)

לכן מספר האפשרויות ליצור זוגות כאלה 3^n ← (לכל אחד מהאיברים יש 3 אפשרויות)

מאפשרויות אלו עלינו לחסר את מספר הזוגות מהצורה $<X,X>$ עבור $X\in P(A)$
מספרן הוא כעוצמת $P(A)$ ולכן 2^n.

בסה"כ $|R| = 3^n - 2^n$.

מש"ל ☒