I ההרכבה היא פעולה אסוציאטיבית.

II ההרכבה אינה קומוטטיבית, כלומר בדר"כ לא מתקיים $\cancel{f\circ g = g\circ f}$.
(גם כאשר בשני האגפים יש משמעות).

דוגמאות נגדיות

① $f = \lambda x \in [0,12]\ \frac{x}{3}$

$g = \lambda x \in [0,6]\ \frac{x}{2}$

$f\circ g = \lambda x \in [0,6].\ \frac{x}{6}$

$g\circ f = \lambda x \in [0,12].\ \frac{x}{6}$

$f\circ g \neq g\circ f$ כי יש להם תחומים שונים.

② $f = \lambda x \in \mathbb{Z}.\ x+1$

$g = \lambda x \in \mathbb{Z}.\ 2x$

$f\circ g = \lambda x \in \mathbb{Z}.\ 2x+1$

$g\circ f = \lambda x \in \mathbb{Z}.\ \underbrace{2(x+1)}_{2x+2}$

$f\circ g \neq g\circ f$ כי יש להם פעולה שונה על איברי התחום.

III קיום של איברים נטרליים.
(0 הוא נטרלי ביחס לחיבור מספרים, 1 נטרלי ביחס לכפל מספרים)

האם קיימת פונקציה u כך שלכל פונקציה f מתקיים $f\circ u = f$ (וגם $u\circ f = f$)?
כמובן שלא, כי אחת u לא יכולה להתאים לכל הפונקציות f.

לא קיימת, אם כן, פונקציה נטרלית ביחס להרכבה במובן הגלובלי אבל כן קיימות פונקציות נטרליות לוקליות ביחס להרכבה.

לכל קבוצה A, נגדיר את פונקציית הזהות של A: $i_A = \lambda x \in A.x$

משפט אם $f \in A \to B$

(i) $f\circ i_A = f$ (ii) $i_B \circ f = f$

הוכחה

(i) ראשית, ההרכבה $f\circ i_A$ בעלת משמעות כיון ש- $\mathrm{Im}\, i_A = A = \mathrm{dom} f$
כעת

$f\circ i_A = \lambda x \in A. f(i_A(x)) = \lambda x \in A. f(x) \underset{\eta}{=} f$

ג. ג. ראשית $i_B\circ f$ בעלת משמעות כי $Im f \subseteq B = dom\, i_B$
כי $f\in A\to B$

כעת נבדוק של-f ול-$i_B\circ f$ אותו תחום:

$dom(i_B\circ f) = dom f$

ולסיום נבדוק שלכל $x\in A$ (הוא התחום המשותף של A ושל $i_B\circ f$)

ואכן $(i_B\circ f)(x) = f(x)$ $(i_B\circ f)(x) = i_B(f(x)) = f(x)$.

<u>הערה:</u> אם $f\in A\to B$, $D\subsetneq A$ אז ההרכבה $f\circ i_D$ היא בעלת משמעות
אך $f\circ i_D\neq f$ כיוון שיש להן תחום שונה. למעשה $f\circ i_D = f|_D$
הצמצום של f ל-D.

IV קיום נגדים והופכיים

(7- הוא הנגדי ל-7 ביחס לחיבור ולהפך. $\frac{3}{5}$ הוא ההפכי של $\frac{5}{3}$ ביחס לכפל ולהפך).

נאמר שפונקציה $g\in B\to A$ היא פונקציה הפוכה לפונקציה $f\in A\to B$ אמ"מ
$f\circ g = i_B$ וגם $g\circ f = i_A$.

<u>הערה (חשובה):</u> אם $f\in A\to B$, $g\in B\to A$ ומתקיים $g\circ f = i_A$

(לא $g\circ f = i_B$) <u>אין זה אומר בהכרח</u> ש-f ו-g הפוכות זו לזו.

<u>דוגמא:</u> $\mathbb{R}\to[0,\infty) \ni f = \lambda x R.\, x^2$ $[0,\infty)\to\mathbb{R} \ni g = \lambda x\in[0,\infty).\, \sqrt{x}$ דוגמא שחשוב לזכור

מבחן

$f\circ g = \lambda x\in[0,\infty).\, (\sqrt{x})^2 = \lambda x\in[0,\infty).\, x = i_{[0,\infty)}$

אך

$g\circ f = \lambda x\in\mathbb{R}.\, \sqrt{x^2} = \lambda x\in\mathbb{R}.\, |x| \neq i_{\mathbb{R}}$

<u>טענה:</u> אם $f\in A\to B$, $g\in B\to A$ ומתקיים $g\circ f = i_A$,
אז
(i) f חח"ע
(ii) g על (A).

<u>הוכחה:</u> (i) כדי להראות ש-f חח"ע עלינו להראות שלכל $a_1,a_2\in A$ מתקיים

$f(a_1) = f(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2$

כיוון ש $f(a_1) = f(a_2)$ הרי ש

$a = i_A(a_1) = (g\circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g\circ f)(a_2) = i_A(a_2) = a_2$

(ii) כדי להראות ש g על A, עלינו לוודא שלכל $a\in A$ יש $b\in B$ כך ש-$g(b)=a$.
נבחר בתור b את $f(a)$ ואכן:

$g(b) = g(f(a)) = (g\circ f)(a) = i_A(a) = a$

מש"ל

<u>מסקנה מהטענה:</u>

אם $f\in A\to B$, $g\in B\to A$ הפוכות זו לזו (כלומר $f\circ g=i_B$ וגם $g\circ f=i_A$)
אז בהכרח f (וגם g) הוא <u>גם חח"ע</u> (לפי הטענה והעובדה $g\circ f=i_A$)
<u>וגם על B</u> (שוב לפי הטענה והעובדה ש- $f\circ g=i_B$).

לפיכך, אם $f\in A\to B$ אז <u>תנאי הכרחי</u> לכך שתהיה ל-f פונקציה הפוכה $g\in B\to A$ הוא ש-f תהיה חח"ע ועל B.

תנאי זה הוא גם תנאי מספיק.

<u>טענה:</u> אם פונקציה $f\in A\to B$ חח"ע ועל B אז קיימת $g\in B\to A$ כך ש-f ו-g הפוכות זו לזו (כלומר $g\circ f=i_A$ וגם $f\circ g=i_B$).

<u>דוגמאות לפני הוכחה</u>

ניזכר בדוגמאות שראינו:

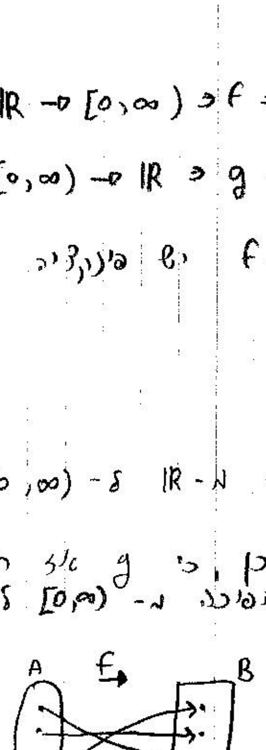
$\mathbb{R}\to[0,\infty)\ni f=\lambda x\in\mathbb{R}.\,x^2$

$[0,\infty)\to\mathbb{R}\ni g=\lambda x\in[0,\infty).\,\sqrt{x}$

ראינו ש-f ו-g אינן הפוכות זו לזו, האם ל-f יש פונקציה הפוכה אחרת (לא g)?

לא, כי f אינה חד-חד ערכית.

האם ל-g יש פונקציה הפוכה אחרת (לא f)?
כפונקציה מ-$[0,\infty)$ ל-$\mathbb{R}$ (כאשר מחפשים הפוכה מ-$\mathbb{R}$ ל-$[0,\infty)$)
התשובה היא שלילית כי g לא על $\mathbb{R}$.
אבל כפונקציה מ-$[0,\infty)$ ל-$[0,\infty)$ התשובה היא כן, כי g גם חח"ע ועל $[0,\infty)$ ולכן לפי הטענה מובטחת שתהיה לה הפוכה מ-$[0,\infty)$ ל-$[0,\infty)$.
והיא $f|_{[0,\infty)}=\lambda x\in[0,\infty).\,x^2$



<u>הוכחה:</u> נגדיר את g (כקבוצה של זוגות סדורים).

$$g=\{\langle b,a\rangle\in B\times A \mid \langle a,b\rangle\in f\}$$

או באופן שקול

$$g=\{\langle f(x),x\rangle \mid x\in A\}$$

$$g=\{\langle \pi_2(z),\pi_1(z)\rangle \mid z\in f\}$$

<u>עלינו לבדוק:</u>

I g שהגדרנו אכן פונקציה מ-B ל-A.

II f,g אכן הפוכות זו לזו.

I ראשית ברור $g\subseteq B\times A$. בנוסף יש לוודא שמתקיימים התנאים הבאים:

(1) $\forall b\in B\,\exists a\in A\,(\langle b,a\rangle\in g) \equiv \forall b\in B\,\exists a\in A.\,(\langle b,a\rangle\in g)$ וזה נכון כי f על B.

(2) $\Leftarrow \forall b\in B\,\forall a_1\in A,a_2\in A\,((\langle b,a_1\rangle\in g\wedge\langle b,a_2\rangle\in g)\to a_1=a_2)$

המשך...

כלומר,

$$\forall b\in B, \forall a_1\in A, a_2\in A\ ((\langle a_1,b\rangle\in f \wedge \langle a_2,b\rangle\in f)\to a_1=a_2)$$

וזה נכון כי f חח"ע.

II נשים לב כי לכל $b\in B$, $a\in A$ מתקיים

$$a=g(b)\leftrightarrow \langle b,a\rangle\in g\leftrightarrow\langle a,b\rangle\in f\leftrightarrow b=f(a)$$

וכעת נראה ש $f\circ g=i_B$. ראשית יש להם אותו התחום שכן

$$dom(f\circ g)=dom\,g=B=dom\,i_B$$

וכמו כן, לכל $b\in B$ עלינו להוכיח ש:

$$(f\circ g)(b)=i_B(b)$$

כלומר $\Updownarrow$

$$f(g(b))=b$$

לפי הטענה מתקיים לכל $\beta\in B$, $\alpha\in A$:

$$\alpha=g(\beta)\longleftrightarrow\beta=f(\alpha)$$

$\Downarrow$ נציב $\beta=b,\ \alpha=g(b)$

$$g(b)=g(b)\Leftrightarrow b=f(g(b))$$

תמיד נכון
ולכן גם הצד
השני תמיד נכון.

באופן דומה (ע"י החלפת תפקידים בין f ל-g, בין A ובין B, בין a ובין b וכו') מקבלים $g\circ f=i_A$.

<u>הגדרה</u> אם $f\in A\to B$ חח"ע ועל (B) נאמר ש f היא פונקציה <u>שקילות</u> מ-A ל-B.

לפי הטענה שהוכחנו, אם $f\in A\to B$ היא פונקציה שקילות מ-A ל-B אז יש לה פונקציה הפכה $g\in B\to A$.

הפונקציה ההפכה לה g היא <u>יחידה</u>, שכן אם $\hat g\in B\to A$ היא פונקציה הפכה <u>נוספת</u> ל-f אז

$$g=g\circ i_B=g\circ(f\circ\hat g)=(g\circ f)\circ\hat g=i_A\circ\hat g=\hat g$$

g יחידה זו תקרא <u>הפונקציה ההפכה</u> ל-f ותסומן f^{-1}.