18

מתמטיקה בדידה - שיעור 7

הערה (תוספת) לשיעור של אתמול:
ראינו שבהנתן אם f הוא פונקציה (כקבוצה של זוגות סדורים) אז התחום של f הוא בדיוק הקבוצה: $\{\pi_1(z) \mid z \in f\}$. בהנתן נוכחת (שגם בה ניתן היה להשתמש בהוכחה הטענה שלמנה שוויון בין פונקציות).

$f = \{\langle x, f(x) \rangle \mid x \in A\}$ כאשר A הוא התחום של f.

כללי η, β, σ לתחשיב λ

כלל η: $f = \lambda x \in A. f(x)$ (לכל פונקציה f עם תחום A).

כלל σ (כלל ההחלפה): $\lambda x \in A. t = \lambda y \in A. \tilde{t}$

t - שם עצם (כש x מופיע בו)

$\tilde{t}$ שם העצם המתקבל מ-t ע"י החלפת כל המופעים החופשיים של x ע"י y.

לא תמיד ההחלפה מותרת.

נסתכל על הפונקציה: $\lambda x \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^{3} k \cdot x$ $\quad (\lambda x \in \mathbb{N}. 6x)$

נבצע החלפה בין x ל-y: $\lambda y \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^{3} k \cdot y$ בסדר החלפה מוצלחת!

ננסה להחליף את x עם k: $\lambda k \in \mathbb{N}. \underbrace{\sum_{k=1}^{3} k \cdot k}$ $\quad (\lambda k \in \mathbb{N}. 14)$

כאן נוצרה בעיה כיוון שנוצרה הפונקציה $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 14$ שמחזירה 14 לכל מספר טבעי. כלומר, שינינו את פעולת הפונקציה.

כדי להמנע מדוגמאות כאלו, נגדיר את כלל σ רק במקרים שהמשתנה החדש (במקרה שלנו y), לא מופיע כלל בשם העצם t.

כלל β (כלל ההצבה): $(\lambda x \in A. t)(a)$ = שם העצם המתקבל מ-t ע"י רישום a במקום כל המופעים החופשיים של x.

a - שם עצם (שמייצג איבר של A)

דוגמאות

$$(\lambda. x \in \mathbb{R}. x^2)(5) = 5^2 = 25$$

$$(\lambda x \in \mathbb{R}. x^2)(a+3) = (a+3)^2$$

$$(\lambda a \in \mathbb{N}. \{k \cdot a \mid k \in \mathbb{N}\})(2) =$$
← לכל a הקבוצה מייצרת את קבוצת הכפולות של a

$$= \{k \cdot 2 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_{even}$$

$$(\lambda a \in \mathbb{N}. \underbrace{\{k \cdot a \mid k \in \{3a \mid a \in \mathbb{N}\}\}}_{t})(2)$$
← לכל a מייצרת את קבוצת הכפולות של a בכל מספר המתחלק ב 3. כלומר כל המספרים מתחלקים ב $3 \cdot a$.

מופע חופשי של a. מופע קשור של a ע"י

$$= \{k \cdot 2 \mid k \in \{3a \mid a \in \mathbb{N}\}\} = \{6 \cdot l \mid l \in \mathbb{N}\}$$

$$(\lambda a \in \mathbb{N}. \{k \cdot a \mid k \in \mathbb{N}\})(k^2)$$

$$= \{k \cdot k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{k^3 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

זה לא מה שרצינו! (רצינו קבוצת הכפולות של a וקיבלנו את קבוצת המספרים בשלישית)

לאור דוגמה זו (גם) את כלל β באופן הבא: לא נתיר את השימוש בכלל אם בתוך שם העצם a מופיע משתנה שלאחר ההצבה הוא נקשר ע"י אופרטור קשירה כלשהו

המשך...

<u>דוגמאות נוספות להצבות כשרות:</u>

I $(\lambda a\in\mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{3} ka)(k+5) = \sum_{k=1}^{3} k\cdot(k+5)$ קשור

II $(\lambda a\in(0,\infty).\ \log_a = \lambda a\in(0,\infty).\ \lambda x\in(0,\infty).\ \log_a x$;

$(\lambda a\in(0,\infty).\ \underbrace{\lambda x\in(0,\infty)\ \log_a x}_{\text{שם חדש}})(e) =_{\beta} \lambda x\in(0,\infty).\ \log_e x =_{\eta} \log_e = \ln$

$(\lambda a\in(0,\infty).\ \lambda x\in(0,\infty).\ \log_a x)(x^2) =_{\beta} \lambda x\in(0,\infty).\ \log_{x^2} x = \lambda x\in(0,\infty).\ \frac{1}{2}$

מבחינה מעשית, ניתן תמיד לעקוף את הבעיה ע"י הקדמה של כלל α לבדיקת הרדוקציה.

<u>למשל בדוגמא I:</u> $(\lambda a\in\mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{3} ka)(k+5) = (\lambda a\in\mathbb{N}.\ \sum_{l=1}^{3} la)(k+5) = \sum_{l=1}^{3} l\cdot(k+5) = 6(k+5)$

<u>ובדוגמא II:</u>

$(\lambda a\in(0,\infty).\ \lambda x\in(0,\infty).\ \log_a x)(x^2) =_{\alpha}$

$(\lambda a\in(0,\infty).\ \lambda y\in(0,\infty).\ \log_a y)(x^2) =_{\beta}$

$\lambda y\in(0,\infty).\ \log_{x^2} y =_{\eta} \log_{x^2}$

<u>הערה:</u>
את כלל α ניתן לקבל כמסקנה משני הכללים האחרים:

$\underbrace{\lambda x\in A.t}_{f} =_{\eta} \lambda y\in A.\ \underbrace{(\lambda x\in A.t)(y)} =_{\beta} \lambda y\in A.\ \tilde{t}$

<u>מושגים חשובים (נוספים) הקשורים לפונקציות</u>

I התחום של הפונקציה f. כאשר f קבוצה של זוגות סדורים $\leftarrow \{\pi_1(z) \mid z\in f\}$

כאשר f רשומה בכתיב λ $\leftarrow f = \lambda x\in\boxed{\text{תחום}}.t$

את התחום של f נסמן dom(f) (domain).

II התמונה של f, שתסומן Im(f).

כאשר f קבוצה של זוגות סדורים $\leftarrow \{\pi_2(z) \mid z\in f\}$

ובשתי צורות הרישום $\leftarrow \{f(x) \mid x\in dom(f)\}$

III כל קבוצה שמכילה את Im(f) נקראת טווח של f

אם f פונקציה, $A=dom(f)$, B הוא טווח אפשרי עבור f (כלומר $Im(f)\subseteq B$) אז נאמר ש f היא פונקציה מ-A ל-B.

<u>דוגמאות:</u> $\begin{cases} f=\lambda x\in\mathbb{R}.\ x^2 \\ dom(f)=\mathbb{R} \\ Im(f)=[0,\infty) \end{cases} \Rightarrow$
f היא פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$[0,\infty)$ (אמת)
f היא פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$(-1,\infty)$ (אמת)
f היא פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$[-7,\infty)$

IV אם A, B קבוצות, נסמן את קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-B כ- $A\to B$

מדוע בכלל זו קבוצה לגיטימית?

$A\to B = \{f\in P(A\times B) \mid \forall a\in A\ (\exists b\in B\ (\langle a,b\rangle\in f) \land (\forall a\in A\ \forall b_1,b_2\in B\ (\langle a,b_1\rangle\in f \land \langle a,b_2\rangle\in f)\to b_1=b_2)\}$

מתמטיקה בדידה - שיעור 7

המשך..

f היא פונקציה מ A ל- B (קבוצה של זוגות סדורים)

$$\Updownarrow$$

$$f \subseteq A\times B \quad !...$$

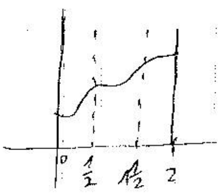
$$\Updownarrow$$

$$f \in P(A\times B) \quad !...$$

מה הקשר בין הפונקציה $\lambda n\in\mathbb{N}.n^2$ ובין הפונקציה $\lambda n\in\mathbb{Z}.n^2$

$\lambda n\in\mathbb{N}.n^2$ נקראת <u>הצמצום</u> של $\lambda n\in\mathbb{Z}.n^2$ לקבוצה $\mathbb{N}$!!

(באופן כללי צמצום של פונקציה f עם תחום A ל- B, כאשר $B\subsetneq A$ היא פונקציה <u>שונה</u> עם תחום B אך אותה "נוסחה")



<u>הגדרה פורמלית</u>

אם f פונקציה מ-A ל-C (בפרט, $f\subseteq A\times C$)

$B\subsetneq A$

אז הצמצום של f ל-B תהיה הפונקציה: $f\cap(B\times C)$

$\{\langle x, f(x)\rangle \mid x\in B\}$

ובכתיב λ $\quad \lambda x\in B.f(x)$

נשתמש בכתיב λ את <u>פעולת</u> הצמצום של פונקציות מ-A ל-C לפונקציות מ-B ל-C.

$$\big(\lambda f\in A\to C.\ \lambda x\in B.f(x)\big)\in (A\to C)\to(B\to C)$$

או

$$\lambda f\in A\to C.\ f\cap(B\times C)$$

V חד-חד ערכיות

$f\in A\to B$ היא חד חד ערכית אמ"מ $\forall b\in B\ \forall a_1,a_2\in A\ \big((b=f(a_1)\wedge b=f(a_2))\to a_1=a_2\big)$

או באופן שקול $\forall a_1,a_2\in A\ (f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2)$

VI על

$f\in A\to B$ היא על (B) אמ"מ $\forall b\in B\ \exists a\in A\ (b=f(a))$

או באופן שקול $B=Im(f)$