28.1.08 ①

מתמטיקה בדידה - שיעור 5

פרק 4 הגדרה ורישום של קבוצות (המשך...)

$A\cup B$ היא הקבוצה שמקיימת:

$$x\in A\cup B \leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)$$

$A\cap B$ מקיימת

$$x\in A\cap B \leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)$$

$A-B$ מקיימת

$$x\in A-B \leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)$$

$A\triangle B$ מקיימת

$$x\in A\triangle B \leftrightarrow (x\in A \text{ xor } x\in B)$$

או ל-A או ל-B אבל לא לשניהם.

$$\left(A\triangle B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)\right)$$

הינו "משלים" שמגדיר קבוצה $\bar{A}$ שמקיים

$$x\in\bar{A} \leftrightarrow \neg(x\in A)$$

שכן קבוצות כאלו הן קבוצות בעייתיות (עלולות להוביל לפרדוקסים כגון פרדוקס ראסל)
המשלים שהגדרנו הוא המשלים האבסולוטי, המוחלט והוא אינו פעולה מותרת בקבוצות.

ניתן לדון ולהשתמש במשלים יחסי אם $A\subseteq U$ (עולם קבוצה) אז המשלים היחסי של A בתוך U הוא בפשטות $U-A$ שמסומן גם $\bar{A}$ (כאשר U ברור מתוך ההקשר).

השימוש במשלים הוא נוח ומועיל למשל לצורך הוכחת זהויות. למשל $A-(B\cup C)=(A-B)-C$
(נשתמש במשלים יחסים ביחס ל-$U=A\cup B\cup C$).

$$A-(B\cup C) = A\cap\overline{(B\cup C)} = A\cap(\bar{B}\cap\bar{C}) = (A\cap\bar{B})\cap\bar{C} = (A-B)\cap\bar{C} = (A-B)-C$$

$\cup,\cap,\triangle$ כולן פעולות אסוציאטיביות וקומוטטיביות. __לדוגמה:__ $\cup$ אסוציאטיבי $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
$\cup$ קומוטטיבי $A\cup B = B\cup A$

$-$ (ההפרש החד-צדדי) לא אסוציאטיבי ולא קומוטטיבי!

פרק 5

אם A קבוצה שהוגדרה, ניתן להגדיר גם את קבוצת החזקה של A שמסומן $P(A)$ (או power set) שאיבריה הם כל הקבוצות החלקיות של A (קבוצות חלקיות של A = תת קבוצות של A = קבוצות המוכלות ב-A).

כלומר $P(A)$ היא קבוצה המקיימת:

$$S\in P(A) \leftrightarrow S\subseteq A$$

__דוגמה:__ $A=\{2,\{2\},\{3\}\}$

$$P(A)=\{\emptyset,\{2\},\{\{3\}\},\{\{2\}\},\{2,\{3\}\},\{\{2\},2\},\{\{3\},\{2\}\},\{2,\{2\},\{3\}\}\}$$

בקבוצת חזקה של קבוצה בת k איברים (A) יהיו תמיד 2^k איברים (כלומר ל-A יש בדיוק 2^k תתי קבוצות).

מתמטיקה בדידה - שיעור 5

<u>הערה 1</u>: הרחבה של כלל 3

$\{t \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$ מוגדרת כאשר $A_1, A_2, \dots A_n$ קבוצות שכבר הוגדרו.

t שם עצם שהמשתנים שמופיעים בו הם $x_1, \dots, x_n$.

מותר שב-t יופיעו משתנים נוספים (להם נקרא הפרמטרים) <u>לדוגמא</u>: $A_a = \{a \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
עבור $a=1$ נקבל $A_1 = \mathbb{N}$. עבור $a=2$ נקבל $A_2 = \mathbb{N}_{even}$.

<u>הערה 2</u>: דרך הרישום שפגשנו בהתחלה עבור קבוצות סופיות, עדיין לגיטימית.
מספיק שנגדיר את "חוקיות" קבוצות בנות איבר אחד (סינגלטונים). את שאר
הקבוצות הסופיות ניתן לקבל ע"י איחוד של סינגלטונים.
(<u>למשל</u>: $\{\pi\} \cup \{3\} \cup \{2\} = \{2, 3, \pi\}$).

<u>הוכחת "חוקיות" סינגלטון</u>

ע"פ כלל 3: $\{2\} = \{\underbrace{2}_{\text{שם עצם}} \mid \underbrace{\quad}_{\text{רשימת משתנים לקבוצה}}\}$ ובאופן כללי (ע"פ הרחבה) $\{a\} = \{a \mid \quad\}$ אחרי קיום של כלל 3.

<u>דוגמא</u>: כתיבה לא פורמלית $\{\{0\}, \{1\}, \{2\} \dots\}$

הגדרה שראינו אתמול לפי כלל 3 $\{\{a\} \mid a \in \mathbb{N}\}$

הגדרה לפי כלל 2+5: $\{S \in P(\mathbb{N}) \mid \underbrace{|S|}_{\text{מספר האיברים ב-S}} = 1\}$

הגדרה נוספת: $\{S \in P(\mathbb{N}) \mid \forall x,y((x \in S \wedge y \in S) \to x=y) \wedge (\exists z . z \in S)\}$

כלומר, לכל 2 איברים שנבחר, אם הם שייכים ל-S אז הם איברים שווים (S מכיל רק איבר אחד) כמו כן, קיים לפחות איבר 1 ב-S.

ועוד אחת (2+5): $\{S \in P(\mathbb{N}) \mid \exists a . (S = \{a\})\}$

<u>הערה 3</u>: ניתן להוכיח שהכללים שקבענו לא מאפשרים הגדרת קבוצה A המקיימת $A \in A$.
(וגם לא קבוצות A, B כך ש- $(A \in B) \wedge (B \in A)$).

ספר מומלץ (להעשרה): משפטי אי השלמות ובעיית היסודות של המתמטיקה / אלי אברון (הוצאת האוניברסיטה המשודרת).

<u>המכפלה הקרטזית</u>

ראינו (בתרגול) כיצד להגדיר את מושג הזוג הסדור $\langle a,b \rangle$ באמצעות מושג הקבוצה.
(למשל כך: $\langle a,b \rangle = \{\{a\}, \{a,b\}\}$).

שוויון בין זוגות סדורים $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \leftrightarrow a=b \wedge b=d$ בפרט $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$ אלא אם $a=b$

עבור קבוצות (חוקיות) A ו-B נגדיר (עפ"י כלל 3):

$$A \times B = \{\langle a,b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

<u>למשל</u>:

$\{1,2\} \times \{2,3,4\} =$
$\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$

$\{2,3,4\} \times \{1,2\} =$
$\{\langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$

מהדוגמא רואים שמכפלה קרטזית אינה קומוטטיבית.

מתמטיקה בדידה - שיעור 5

המשך:

<u>הערה</u>: $A\times\emptyset=\emptyset$ (וגם $\emptyset\times A=\emptyset$)

לשם כך נרשום הגדרה שקולה של $A\times B$ (לפי ב 2)

$$\{z\in P(P(A\cup B))\mid \exists a\in A,\ b\in B\ (z=\langle a,b\rangle)\}$$

(אם $a\in A$, $b\in B$ אז $\{a\}\in P(A)\in P(A\cup B)$, $\{a,b\}\in P(A\cup B)$ ולכן $\{\{a\},\{a,b\}\}\subseteq P(A\cup B)$ כלומר $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}\in P(P(A\cup B))$).

המכפלה הקרטזית נקראת מכפלה כי אם ב-A α איברים וב-B β איברים אז ב-$A\times B$ (וגם $B\times A$) בדיוק $\alpha\cdot\beta$ איברים. המכפלה הקרטזית נקראה קרטזית על שם Rene Des Cartes.

בגאומטריה אנליטית (שדקרט היה המייסד שלה) מייצגת הנקודות במישור (זוגות <u>סדורים</u> של מספרים ממשיים) ולכן המישור כולו מיוצג כקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

<u>פונקציות</u>

עבור קבוצות A ו-B, פונקציה מ-A ל-B (A הוא התחום של הפונקציה, B הוא הטווח של הפונקציה). היא כל קבוצה f חלקית ל-$A\times B$ המקיימת:

$$\forall a\in A\ (\exists b\in B.\ (\langle a,b\rangle\in f)\wedge(\forall b_1\in B\ (b_2\in B\ ((\langle a,b_1\rangle\in f\wedge\langle a,b_2\rangle\in f)\to(b_1=b_2))))$$