27.1.08 ①

מתמטיקה בדידה - שיעור 4

<u>עוד על השוני בין $\in$ ל- $\subseteq$</u>

I $(A\in B \wedge B\in C) \not\rightarrow A\in C$

אבל $(A\subseteq B \wedge B\subseteq C) \rightarrow A\subseteq C$

II $\emptyset = \{\}$

לכל קבוצה A: $\emptyset \subseteq A$

אבל <u>לא בהכרח</u> $\emptyset \in A$.

<u>למשל:</u> $\emptyset\in\{1,2,\emptyset\}$ אבל $\emptyset\notin\{1,2,3\}$

III לכל קבוצה A: $A\subseteq A$

אבל <u>לא בהכרח</u> $A\in A$

למשל $\{1,2,3\}\notin\{1,2,3\}$

<u>האם $\emptyset\in\emptyset$?</u> לא, כי לכל x $x\notin\emptyset$ ובפרט $\emptyset\notin\emptyset$

"דוגמאות" לקבוצות ששייכות לעצמן:

I הקבוצה של כל הדברים (הקבוצה של הכל).

II הקבוצה של כל הקבוצות

III (דוגמה של Russel) הקבוצה של כל הדברים שאינם כפית.

ראסל הציע להתבונן בקבוצה הבאה P: קבוצת כל הקבוצות שלא שייכות לעצמן.
למשל: $\{1,2,3\}\in P$, $\emptyset\in P$, אך קבוצת כל הקבוצות $\notin P$.

באופן כללי, עבור קבוצה כלשהי A:

$$\boxed{A\notin A \longleftrightarrow A\in P}$$

<u>האם $P\in P$ או $P\notin P$?</u>
אם נציב בהגדרה את P במקום A נקבל: $P\in P \longleftrightarrow P\notin P$
וקבלנו <u>סתירה</u>. סתירה זו נקרא פרדוקס ראסל.

<u>מוצא I מפרדוקס ראסל</u>: ביטול המוסכמה המתמטית שישנם רק 2 ערכי אמת (חוק השלישי הנמנע).
בדרך זו בחרו האינטואיציוניסטים.

<u>מוצא II</u> צמצום מושג הקבוצה (באופן שלא יאפשר קבוצות כמו P).
יש קביעת רשימת כללים מוסכמת ומצומצמת שרק לפיהם ניתן להגדיר קבוצות.

<u>כלל 1</u> קיימת הקבוצה $\mathbb{N}$ של המספרים הטבעיים. $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,....\}$
<u>הערה</u>: מסיבות טכניות נניח גם את קיום קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$. לא פורמלי

<u>כלל 2</u> (כלל להגדרת תת-קבוצות).

אם A היא קבוצה שהוגדרה כבר, P הוא פסוק שאין בו משתנים חופשיים פרט ל-x אז מותר להגדיר את הקבוצה:

$$\{x\in A \mid P\}$$

זוהי קבוצת כל איברי A שבהם P הוא פסוק אמת.

תיאור לא פורמלי

<u>דוגמאות:</u> $\{x\in\mathbb{N} \mid x<\pi\}=\{0,1,2,3\}$

$\{x\in\mathbb{N} \mid \exists y.(y\in\mathbb{N}\wedge x=2y)\}$ - קבוצת המספרים הזוגיים הטבעיים. $\{0,2,4,6,\ldots\}$

קבוצה זו תופיע אצלנו הרבה ולכן ניתן לה כינוי $\mathbb{N}_{even}$!! (ובאופן דומה, נקרא לקבוצת המספרים הטבעיים האי זוגיים $\mathbb{N}_{odd}$).

<u>הערה:</u> כמעט תמיד נלווה כל משתנה הצמוד לכמת (מלכתחילה) ע"י ציון הקבוצה אליה הוא שייך.

<u>עוד דוגמאות:</u> נגדיר את קבוצת השלמים:

$$\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|\in\mathbb{N}\}$$

הקבוצה הבאה אינה תקינה כי אין שיוך של x לקבוצה ~~$\{x \mid |x|\in\mathbb{N}\}$~~ ~~$\{S \mid S\notin S\}$~~

$$\{x\in\mathbb{N} \mid \exists y\in\mathbb{Z}\,(x=2y)\} \overset{x\in\mathbb{N}\text{ כי}}{=} \{x\in\mathbb{N} \mid \exists y\in\mathbb{N}\,(x=2y)\}$$

אלו 2 קבוצות נוספות להגדרת $\mathbb{N}_{even}$

$$\{x\in\mathbb{N} \mid \exists y\in\mathbb{R}\,(x=2y)\}=\mathbb{N}$$

$$\{x\in\mathbb{N} \mid \neg\exists y\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{N}.((x=yz)\wedge(z>1)\wedge(y>1))\}$$

$$\{x\in\mathbb{N} \mid x\neq x\}=\emptyset$$

<u>כלל 3</u> אם t הוא שם עצם שמופיעים בו משתנים (חופשיים - כי זה שם עצם) $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ו- $A_1,A_2,\ldots,A_k$ קבוצות שכבר הוגדרו. אז ניתן להגדיר את הקבוצה הבאה:

$$\{t \mid x_1\in A_1, x_2\in A_2, \ldots, x_k\in A_k\}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\mathbb{Q}=\{\tfrac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}_+\}$$

$\mathbb{N}_+=\{x\in\mathbb{N} \mid x=0\}$ הגדרה לפי כלל 2

$\mathbb{N}_+=\{x+1 \mid x\in\mathbb{N}\}$ הגדרה לפי כלל 3

ננסה להגדיר באופן פורמלי את הקבוצה (המתוארת באופן לא פורמלי) $\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\}$:

$$\{\{x\} \mid x\in\mathbb{N}\}$$

<u>כלל 4</u> אם B,A קבוצות שכבר הוגדרו אז ניתן להגדיר גם את הקבוצות: $A\cap B, A\cup B, A-B$ (וגם) $(A\triangle B)$

<u>הערה:</u> את החיתוך $A\cap B$ ניתן להגדיר לפי כלל 2: $\{x\in A \mid x\in B\}$

וגם את ההפרש $A-B$: $\{x\in A \mid x\notin B\}$