20.1.08 ①

מתמטיקה בדידה - שיעור 2

תזכורת משיעור 1

מרכיבי השפה המתמטית:

סימני יחס $(\leq, >, <, =, \ldots)$

סימני פונקציות (מוד, $+$, $:$, $\ldots$)

סימני קבועים $(0, \pi, \infty \ldots)$

משתנים $(z, y, x, \alpha \ldots)$

שמות עצם:

שמות עצם יסודיים - משתנים וסימני קבועים.

שמות עצם מורכבים- בנויים משמות עצם בסיסים יותר (יסודיים או מורכבים) בעזרת סימני פונקציה.

דוגמאות לשמות עצם: x , π , $(x)+(\pi)$, $+(x,\pi)$, $((x)+(\pi))\cdot(y)$

פסוקים

פסוקים יסודיים מתקבלים בהצבת שמות עצם בסימן יחס. למשל: $x+\pi>y$.
בפסוק יסודי יהיה רק סימן יחס אחד. שמות עצם מבטא תמיד ערך כמותי, המשמעות של פסוק היא לוגית. אין ערך כמותי אלא בוליאני. זו ההבחנה העיקרית בין פסוקים לשמות עצם.

פסוקים מורכבים בנויים מפסוקים בסיסיים יותר (יסודיים או מורכבים) ע"י שימוש בקשרים וכמתים. נשתמש רק בקשרים $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ ובכמתים $\exists$, $\forall$.

המשתנים בפסוק מסווגים למשתנים חופשיים ומשתנים קשורים.
בפסוק יסודי, כל המשתנים המופיעים חופשיים.
כאשר משתמשים בקשר כדי להרכיב פסוק, סיווג המשתנים אינו משתנה.
כשמשתמשים בכמת $(\exists z, \forall y \ldots)$ כדי ליצור פסוק חדש, משתנה הסיווג של המשתנה המצומד לכמת (והיה חופשי) מחופשי לקשור.

דוגמאות:

$x+\pi>y$ — x, y חופשיים

$\exists y\,(x+\pi>y)$ — y קשור, x חופשי

$(0<x)\wedge(\exists y\,(x+\pi>y))$ — y קשור, x חופשי בפסוק זה. חשוב לדעת שמדובר על אותו x.

ע"מ שם משתנה, רק חלק מהכמת.

$\underbrace{(\exists y\,(x+\pi>y))}_{y\text{ היה קשור}} \wedge \underbrace{(y>0)}_{y\text{ היה חופשי}}$

x חופשי, ל-y 2 מופעים: אחד חופשי ואחד קשור.
חשוב לשים לב שבשם ה-y הקשור היינו יכולים לשנות למשתנה אחר מבלי להשפיע על ה-y החופשי בפסוק. אך, כדאי בדרך כלל לעשות הפרדה בסימון שלהם כדי למנוע בלבול. עם זאת, לעתים נוח יותר כן להשתמש באותו הסימון כדי לבטא "מחזור" של איכויות משתנים כאשר הם נחוצים. לתאר פסוקים מסוימים. דוגמה: n מספר טבעי המשאיר שארית 2, 3 או 5 כשמחלקים אותו ב-7: בעיקרון זה נראה:
$(\exists k.\,(n=7k+2)) \vee (\exists k.\,(n=7k+3)) \vee (\exists k.\,(n=7k+5))$

20.1.08 ②

מתמטיקה בדידה - שיעור 2

המשך...

$\exists x.((x^2=y) \wedge (\exists y\ (x+\pi>y)))$ — שני המופעים של x קשורים. ל-y יש מופע קשור אחד ומופע חופשי אחד. (לא אותו כמה)

$\exists y((x^2=y) \wedge (\exists y.(x+\pi>y)))$ — x חופשי, ל-y 2 מופעים קשורים אך כל אחד מהם קשור לכמת אחר, 2 הכמתים - נפרדים.

מילה שנייה ← אם בפסוק יש מספר מופעים של אותו משתנה וכם חופשיים, כל המופעים החופשיים הללו "קשורים" זה לזה כי כולם אחרת מתייחסים לאותו הערך. לעומת זאת, כאשר קיימים מספר מופעים של משתנים קשורים, כאשר כל אחד מהם קשור לכמת אחר, אין בין המשתנים אלו קשר ערך.

מופעים הקשורים של משתנה כלשהו בפסוק יכולים להקשר ע"י כמתים נפרדים (לכל מופע קשור כזה תהיה אז משמעות נפרדת).
לכן המופעים החופשיים של משתנה כלשהו בפסוק אותה משמעות (מייצגים אותו אובייקט).

$\forall x\left(\left((0<x) \wedge (x<1)\right) \rightarrow \left((\exists y\ (x=y^2)) \wedge (\exists y\ (x=1-y^2))\right)\right)$

אותו x / y-ים שונים

כלומר רשום שלכל x שבין חיובי, יש y עבורו $x=y^2$ וגם יש y אחר שעבורו $x=1-y^2$,
למשל, עבור $x=\frac{1}{3}$, יש y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ עבורו $x=y^2$ ויש גם y (אחר - $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$) עבורו $x=1-y^2$,

לכל פסוק יש ערך אמת, T אמת או F שקר. גם שקר הוא ערך אמת.

$\forall x:\ (x>x-3)$ פסוק אמת

$\exists x;\ (x=x+5)$ פסוק שקר

$\forall x:\ (x>5)$ פסוק שקר

$\exists y:\ (x=y^2+5)$ אמת או שקר?

מוסכמה: ערך האמת של פסוק P שיש בו משתנים חופשיים (נניח x, y, z) יקבל לפי ערך האמת של הפסוק המתקבל מ-P ע"י הוספת כמתי $\forall$ עבור כל המשתנים האלו (כלומר הפסוק $(\forall x(\forall y(\forall z\ (P))))$).

כלומר עבור הפסוק $\exists y:\ (x=y^2+5)$ נתבונן בפסוק $\forall x\ (\exists y.(x=y^2+5))$ ונקבל שערך האמת (של שני הפסוקים) הוא F.

קביעת ערך האמת של פסוקים

שבלת אמת - מאפשרת לקבוע את ערך האמת של פסוק מורכב מתוך ערכי האמת של המרכיבים שלו כאשר מדובר בקשרים.

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	F	F
F	T	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

מתמטיקה בדידה - שיעור 2

המשך..

דוגמא - לטבלת האמת של הגרירה.

$$\overset{p}{x>5} \rightarrow \overset{q}{x>3}$$ אמת

	p	q	$p \rightarrow q$
$x=7$	T	T	T
$x=2$	F	F	T
$x=4$	F	T	T

<u>שקילות</u>

אם לשני פסוקים (מורכבים, כלומר מורכבים מפסוקים) יש אותה טבלת אמת, הם יקראו שקולים (באופן לוגי).

למשל $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

<u>שקילויות הקשורות לכמתים</u>

$$\exists x\,(p \wedge q) \overset{?}{\equiv} (\exists x(p)) \wedge (\exists x(q))$$

$$\exists x\,(p \vee q) \overset{?}{\equiv} (\exists x(p)) \vee (\exists x(q))$$

הערה: המשמעות כאן היא שאלה כאשר ב-p ו-q יש x מסוימים (אותו x או אין הכרח). לעיתים כדי להדגיש כותבים (כתיבים) $p(x)$ ו-$q(x)$.