0368-1118

מתמטיקה בדידה
אברון, טרסי, רודיטי

סמסטר א' תשס"ז
מועד ב' 18.9.2007

משך הבחינה שלוש שעות. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**.
יש להשיב על **חמש** השאלות. משקלן של שלוש השאלות שתקבלנה את הציונים הגבוהים יותר 25% לכל שאלה ומשקלן של שתי השאלות שתקבלנה ציונים נמוכים 12.5% לשאלה.

כל תוצאה שהוצגה בכיתה או בתרגול אפשר לצטט בלי הוכחה, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

1 א. חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות (N היא קבוצת המספרים הטבעיים):
i. $(N\to\{0,1\})\to P(\{\phi\})$ ii. $P(N-(N-\{1,2,3\}))$

ב. חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות:
iii. $P(N)-P(N-\{1,2,3\})$ iv. $P\big(P(N)\cap P(P(N))\big)$

ג. כנגד שתי עוצמות $a,b>0$ נגדיר $\mathrm{Log}(a,b)=\{c \mid a^c=b\}$ תנו דוגמה לעוצמות a ו-b כך ש $|\mathrm{Log}(a,b)|=\aleph_0$. הוכיחו קביעתכם במלואה.

2 א. מצאו בטוי סגור לאבר הכללי a_k של הסדרה $\lambda k\in N.a_k$ המוגדרת על ידי $a_0=2$, $a_1=5$ ומשוואת הנסיגה $a_{k+2}=5a_{k+1}-6a_k$.

ב. מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה $\lambda k\in N.b_k$ שסדרת ההפרשים שלה $\lambda k\in N.d_k$ (מוגדרת על ידי $d_0=b_0$, ולכל k חיובי $d_k=b_k-b_{k-1}$), מקיימת $d_0=1$, $d_1=2$ ואת משוואת הנסיגה $d_{k+2}=5d_{k+1}-6d_k+2$.

ג. הוכיחו כי קבוצת ההפרשים בין סדרות שהן פתרונות של משוואת הנסיגה בסעיף ב' (עם תנאי התחלה כלשהם) היא מרחב לינארי והציגו בסיס למרחב זה.

3 לכל מספר טבעי n נסמן ב-In את קבוצת המספרים הטבעיים הקטנים מ-n, למשל $I_6=\{0,1,2,3,4,5\}$. חשבו את העוצמות הבאות, והשלימו את החישוב לקבלת תוצאה מספרית סופית.

א. $|I_5\to I_{10}|$

ב. $\big|\{f\in(I_5\to I_{10}) \mid |\mathrm{Image}(f)|=3\}\big|$

ג. $\big|\{f\in(I_5\to I_{10}) \mid |\mathrm{Image}(f)|=3\}/S\big|$
כאשר S הוא יחס השקילות המוגדר על ידי:
$S=\{\langle f,g\rangle\in(I_5\to I_{10})^2 \mid$ קיימת h הפיכה כך ש $g=f\circ h\}$

XX-GY

4 נגדיר סדרה של קבוצות $\lambda n\in N.a_n$ על ידי $a_0=\phi$ ולכל $n\geq 1$, $a_n=\cup a_{n-1}$
וסדרה נוספת $\lambda n\in N.b_n$ על ידי $b_0=\phi$ ולכל $n\geq 1$, $b_n=b_{n-1}\cup\{b_{n-1}\}$

א. חשבו את a_7

ב. חשבו את $(\cup b_8)\,\Delta\, b_7$ (הסימן Δ מייצג הפרש סימטרי).

ג. חשבו את $(\bigcup_{n\in N} b_n)\,\Delta\,\{b_n \mid n\in N\}$

תזכורת באשר לסימון: $\cup A$ הוא איחוד כל הקבוצות שהן אברים של A.

5. הגדרות: **<u>איזומורפיזם</u>** מגרף (פשוט, בלתי מכוון) $G=(V,E)$, לגרף (כנ"ל) $G'=(V',E')$ הוא פונקציה $f:V\rightarrow V'$ כך שכל שני קדקדים x ו-y מתוך V הם קצותיה של קשת ב-E, אם ורק אם $f(x)$ ו-$f(y)$ הם קצותיה של קשת ב-'E. איזומורפיזם מגרף G לעצמו, יקרא **<u>אוטומורפיזם</u>** של G.

א. הציגו גרף פשוט על קבוצת הקדקדים $V=\{1,2,3,4\}$, שכל פונקציה הפיכה מ-V ל-V היא אוטומורפיזם שלו.

ב. מה העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקדקדים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, עם המגבלה ששום שניים מהם אינם איזומורפיים?

ג. ציירו את העץ המתקבל מהמילה (2,3,2,4,7,10,1,1) לפי הקידוד (קוד Prüfer) בהוכחת משפט קיילי!

הערה: אין קשר בהכרח בין הסעיפים השונים של השאלה.

בהצלחה!

טבלה ד.3:

זהויות בינומיאליות חשובות

	תנאים	
(1)	$k \le n$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2)	$k \ge 1$	$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$
(3)	$\alpha \in \mathrm{N} \vee \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert < 1$	$(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^{k}$
(4)		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = 2^{n}$
(5)	$n \ge 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \binom{n}{k} = 0$
(6)		$\binom{-x}{k} = (-1)^{k} \binom{x+k-1}{k}$
(7)	$k \le n$	$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$
(8)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$
(9)	$m \le n$	$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
(10)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$

טבלה ד.4: פונקציות יוצרות: התכונות היסודיות

נניח: F יוצרת את $\lambda n.\, a_n$.

G יוצרת את $\lambda n.\, b_n$.

אז:

(1)	$\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \alpha\, a_n + \beta\, b_n$
(2)	$\lambda x.\ x^m.\ F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$
(3)	$\lambda x.\ \dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1}x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.\ a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.\ F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.\ c^n a_n$
(5)	$\lambda x.\ F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n. \begin{cases} a_{\frac{n}{m}} & m \setminus n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
(6)	$\lambda x.\ F(x)\cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\ \dfrac{F(x)}{1-x}$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k$
(8)	F'	יוצרת את	$\lambda n.\ (n+1)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.\ x \cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ na_n$
(10)	$\lambda x.\ \int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\ \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{a_{n-1}}{n} & n > 0 \end{cases}$

טבלה ד.5: פונקציות יוצרות: דוגמאות חשובות

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה לא פורמלית
(1)	$\lambda x.\ x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0,0,\ldots,1,0,0,0,\ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\frac{1}{1-x}$	$\lambda n.\ 1$	$\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\frac{1}{1+x}$	$\lambda n.\ (-1)^n$	$\langle 1,-1,1,-1,-1,1,\ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\frac{1}{1-cx}$	$\lambda n.\ c^n$	$\langle 1,c,c^2,c^3,c^4,\ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.\ (1+x)^\alpha$	$\lambda n.\binom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1,\alpha,\binom{\alpha}{2},\binom{\alpha}{3},\ldots\right\rangle$
(6)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\binom{\alpha+n-1}{n}$	$\left\langle 1,\alpha,\binom{\alpha+1}{2},\binom{\alpha+2}{3},\ldots\right\rangle$
(7)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\binom{m+n}{m}$	$\left\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots\right\rangle$
(8)	$\lambda x.\frac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.\ n$	$\langle 0,1,2,3,4,\ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.-\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ 1/n & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\rangle$
(10)	$\lambda x.\ e^{ax}$	$\lambda n.\frac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1,a,\frac{a^2}{2!},\frac{a^3}{3!},\ldots\right\rangle$
(11)	$\lambda x.\ \cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\frac{a^n}{n!} & \text{זוגי } n\\ 0 & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$	$\left\langle 1,0,\frac{a^2}{2!},0,\frac{a^4}{4!},\ldots\right\rangle$
(12)	$\lambda x.\ \sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & \text{זוגי } n\\ \frac{a^n}{n!} & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$	$\left\langle 0,a,0,\frac{a^3}{3!},0,\frac{a^5}{5!},0\ldots\right\rangle$