0368-1118

מתמטיקה בדידה
אברון, טרסי, רודיטי

סמסטר אי תשסייז
מועד אי 16.2.2007

משך הבחינה שלוש שעות. להוציא דפי הנוסחאות המצורפים, השימוש בחומר עזר כלשהו, או במחשבון, **אסור**.

יש להשיב על **כל חמש** השאלות. חישוב הציון: 25 נקודות לשאלה. ציון שתי השאלות שיקבלו את הניקוד הנמוך ביותר יחולק בשתיים.

כל תוצאה שהוצגה בכיתה או בתרגול אפשר לצטט בלי הוכחה, אלא אם נאמר במפורש אחרת. הסימנים N, N^+ ו-R מציינים, כמקובל, את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים החיוביים והממשיים.

1 א. חשבו את העוצמות הבאות והוכיחו תוצאת כל חישוב. לצורך ההוכחה מותר השמוש בכל כללי האריתמטיקה (לא כולל, כמובן, את תוצאת החישוב עצמה).

$\aleph+\aleph$, $\aleph\bullet\aleph$, $\aleph^{\aleph}$.

ב. תהא A קבוצה בעלת עוצמה $|A|\geq\aleph$. הוכיחו כי קיימת תת קבוצה B של A, כך ש $|B|\geq\aleph$ ו- $|A-B|=\aleph$.

2 בקבוצת הפונקציות הממשיות $R\to R$ נגדיר יחס שקילות "~" כלהלן:

$$f\sim g \Leftrightarrow \left(\forall x,y\in R \left(f(x)=f(y) \Leftrightarrow g(x)=g(y) \right) \right)$$

א. חשבו את עוצמתה של מחלקת השקילות $[\lambda x\in R.1]_\sim$

ב. חשבו את עוצמתה של מחלקת השקילות $[\lambda x\in R.x]_\sim$

ג. הוכיחו או הפריכו: שתי פונקציות ממשיות f ו g מקיימות $f\sim g$ אם ורק אם קיימת פונקציה ממשית הפיכה h כך ש $g=f\circ h$

3 א. מהי הפונקציה היוצרת (הרגילה) של הסידרה $\lambda n\in N.\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$? הציגו ביטוי סגור.

ב. הוכיחו או הפריכו: בכל קבוצה בת עשרים ושישה מספרים טבעיים קטנים מ-50 יש שניים שסכומם 49.

ג. בכמה אופנים ניתן לבנות מקוביות אדומות, ירוקות, צהובות וכחולות (אין הכרח להשתמש בכל הצבעים) מגדל בגובה חמש קוביות, כך שלפחות אחת מכל שתי קוביות סמוכות היא כחולה או ירוקה? הציגו תוצאה מספרית סופית.

XX-61

4 נגדיר: $A_n=\{{}^{k}/_{n} \mid n,k\in N^{+}\wedge k\leq n\}$ עבור $n\in N^{+}$
חשבו:

א. $\left|A_n\to A_{2n}\right|$

ב. $\left|\{f:A_n\to A_{2n} \mid \forall x\in A_n\ f(x)\neq 1-x\}\right|$

ג. $\left|\{f:A_n\to A_{2n} \mid \forall x\in A_n\ f(x)\neq 1-x \wedge$ חד חד ערכית $f\}\right|$

5 תזכורת: $P_2(A)$ היא קבוצת כל תת הקבוצות בעוצמה 2 של הקבוצה A.

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט לא מכוון (כלומר קשת היא קבוצה בת שני קודקודים) המוגדר על ידי: $V=P_2(\{1,2,\dots n\})$

$E=\{\{A,B\}\in P_2(V) \mid |A\cap B|=0\}$

א. חשבו את $|V|$
ב. מהי הדרגה של כל קודקוד ב-V?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר.

בהצלחה!

טבלה ד.3:
זהויות בינומיאליות חשובות

	תנאים	
(1)	$k \le n$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2)	$k \ge 1$	$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$
(3)	$\alpha \in \mathbf{N} \vee \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert < 1$	$(a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$
(4)		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = 2^n$
(5)	$n \ge 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
(6)		$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$
(7)	$k \le n$	$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$
(8)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$
(9)	$m \le n$	$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
(10)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$

טבלה ד.4.7: פונקציות יוצרות: התכונות היסודיות

נניח: F יוצרת את $\lambda n.\ a_n$.

G יוצרת את $\lambda n.\ b_n$.

אז:

(1)	$\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \alpha a_n + \beta b_n$
(2)	$\lambda x.\ x^m.\ F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$
(3)	$\lambda x.\dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1} x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.\ a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.\ F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.\ c^n a_n$
(5)	$\lambda x.\ F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases} a_{\frac{n}{m}} & m \backslash n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
(6)	$\lambda x.\ F(x) \cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\dfrac{F(x)}{1-x}$	יוצרת את	$\lambda n.\ \sum_{k=0}^{n} a_k$
(8)	F'	יוצרת את	$\lambda n.\ (n+1)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.\ x \cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\ na_n$
(10)	$\lambda x.\int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{a_{n-1}}{n} & n > 0 \end{cases}$

טבלה ד.5: פונקציות יוצרות: דוגמאות חשובות

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה לא פורמלית
(1)	$\lambda x.\, x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-x}$	$\lambda n.\, 1$	$\langle 1, 1, 1, 1, \ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\dfrac{1}{1+x}$	$\lambda n.\, (-1)^n$	$\langle 1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-cx}$	$\lambda n.\, c^n$	$\langle 1, c, c^2, c^3, c^4, \ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.\, (1+x)^\alpha$	$\lambda n.\dbinom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \dbinom{\alpha}{2}, \dbinom{\alpha}{3}, \ldots \right\rangle$
(6)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\dbinom{\alpha+n-1}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \dbinom{\alpha+1}{2}, \dbinom{\alpha+2}{3}, \ldots \right\rangle$
(7)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\dbinom{m+n}{m}$	$\left\langle 1, \dbinom{m+1}{m}, \dbinom{m+2}{m}, \dbinom{m+3}{m}, \ldots \right\rangle$
(8)	$\lambda x.\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.\, n$	$\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.\, -\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ 1/n & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots \right\rangle$
(10)	$\lambda x.\, e^{ax}$	$\lambda n.\dfrac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1, a, \dfrac{a^2}{2!}, \dfrac{a^3}{3!}, \ldots \right\rangle$
(11)	$\lambda x.\, \cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\dfrac{a^n}{n!} & n \text{ זוגי}\\ 0 & n \text{ אי־זוגי}\end{cases}$	$\left\langle 1, 0, \dfrac{a^2}{2!}, 0, \dfrac{a^4}{4!}, \ldots \right\rangle$
(12)	$\lambda x.\, \sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n \text{ זוגי}\\ \dfrac{a^n}{n!} & n \text{ אי־זוגי}\end{cases}$	$\left\langle 0, a, 0, \dfrac{a^3}{3!}, 0, \dfrac{a^5}{5!}, 0 \ldots \right\rangle$