(41)

03681118201
031405640 11

מתמטיקה בדידה
י. רודיטי

סמסטר קיץ תשס"ד
מועד א' 9.09.04

(100)

משך הבחינה שלוש שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

לגליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתיבת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

<u>נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.</u>

כמקובל, האותיות N, R ו-Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.
בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות. ערך מכסימלי **לתשובה נכונה** לשאלה הוא 20% .
למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי.
ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.

1. א. הוכיחו כי חיבור עוצמות מוגדר היטב.

ב. תהיינה a, b עוצמות. הוכיחו או הפריכו:
(i) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c כך ש-$ac = b$ אזי, $a \leq b$.
(ii) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c, $c > 1$, כך ש-$ac = b$, אזי $a < b$.
(iii) אם $b \neq 0$ ו- $a \leq b$ אזי קיימת עוצמה c כך ש-$ac = b$.

2. קבוצה A תקרא <u>**תקינה**</u> אם $|A| \times |A| = |A|$.

א. הוכיחו כי אם A קבוצה אינסופית ותקינה, וכן B קבוצה, אזי הקבוצה $A \rightarrow B$ היא קבוצה תקינה.

ב. האם (א) נכון **ללא** התנאי ש- A אינסופית?

3. תהי, $A_n = \{ k \in N \mid 1 \leq k \leq 3n \}$.

א. בכמה מהתמורות של אברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $3n$ (<u>**לאו**</u> דווקא צמוד לו).

ב. בכמה מהתמורות של אברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $2n$ ואילו האיבר $2n$ מופיע משמאלו של האיבר $3n$ (שוב: <u>**לאו**</u> דווקא בצמידות זה לזה).

ג. נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$B_n = \{ f \in In(A_n, A_n) \mid \forall 1 \leq k \leq n-1 , f^{(-1)}(3k) \leq f^{(-1)}(3k+3) \}.$$

הוכיחו כי הקבוצה B_n מוגדרת היטב, וחשבו את עוצמתה.

(<u>**תזכורת:**</u> הסימון $In(A,B)$ הוא של קבוצת <u>כל</u> הפונקציות החח"ע מהקבוצה B לקבוצה A).

XX-52

4. תהי $M = N^{+} \cup \{ 1/n \mid n \in N^{+} \}$. נגדיר יחס: $S = \{ \langle x,y\rangle \in R^{2} \mid \exists z \in M , x = yz \}$.

א. האם S הוא יחס שקילות? נמקו !

ב. נגדיר פונקציה: $f = \lambda x \in R . \{ y \in R \mid \langle x,y\rangle \in S \}$.

(i) חשבו את $f(0)$.

(ii) הוכיחו כי $N^{+} \subseteq f(1/2)$

(**<u>תזכורת:</u>** הסימון N^{+} הוא של קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים).

5. א. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ f : \{ n \in N \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid f^{(-1)}[\{A\}] \cap f^{(-1)}[\{B\}] = \emptyset \}$$

ב. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ f : \{ n \in N \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid |f^{(-1)}[\{A\}]| \in N_{even} \}$$

6. יהיו $T_1 = \langle V_1 , E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2 , E_2 \rangle$ עצים .
נגדיר גרף G באופן הבא:

$G = \langle V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2 \rangle$.

א. נתון כי $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו!

ב. נתון כי $E_1 \cap E_2 = \{ e \}$ האם G בהכרח עץ? נמקו!

בהצלחה!

20 תשובה לשאלה מס' 1 מס' סטודנט___

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מכ

(1) [illegible] A,B [illegible] $A\cap B=\emptyset$, $|A|=a$, $|B|=b$ [illegible] $|A\cup B|=a+b$

[illegible] A',B' [illegible] $A'\cap B'=\emptyset$, $|A|=|A'|=a$, $|B|=|B'|=b$

(I) [illegible] $A'\cup B'\sim A\cup B$ [illegible]

$|A|=|A'|$ [illegible] $A\sim A'$ [illegible] $f:A\to A'$

$|B|=|B'|$ [illegible] $B\sim B'$ [illegible] $g:B\to B'$

[illegible] $h:A\cup B\to A'\cup B'$ ~~[illegible]~~

$$h=\lambda x\in A\cup B.\begin{cases} f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in B\end{cases}$$

h [illegible] $A\cap B=\emptyset$ [illegible] $\forall x\in A\cup B$ [illegible]

[illegible] $x\in A$ ($h(x)=f(x)$) [illegible] $x\in B$ ($h(x)=g(x)$) . h [illegible]

(1) [illegible] $x_1,x_2\in A\cup B$ [illegible] $h(x_1)=h(x_2)$ [illegible] $A'\cap B'=\emptyset$ [illegible] $h(x_1)=f(x_1)=f(x_2)=h(x_2)$ [illegible]

[illegible] f [illegible] $x_1=x_2$ [illegible] $h(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=h(x_2)$ [illegible] g [illegible] $x_1=x_2$. $\boxtimes$

(2) [illegible] $y\in A'\cup B'$ [illegible] $y\in A'$ (1) [illegible] f [illegible] A' [illegible] $x\in A$ ([illegible] $x\in A\cup B$)

[illegible] $f(x)=h(x)=y$ [illegible] (2) $y\in B'$ [illegible] g [illegible] B' [illegible] $x\in B$ ([illegible] $x\in A\cup B$)

[illegible] $g(x)=h(x)=y$ [illegible] $x\in A\cup B$ [illegible] $h(x)=y$ [illegible] h

(II) [illegible] A',B' [illegible] $A'\cap B'=\emptyset$ [illegible] $|A'|=a$, $|B'|=b$

[illegible] A',B' [illegible] $|A'|=a$, $|B'|=b$ [illegible] $A'\cap B'=\emptyset$ [illegible]

$h_1:A'\to\{0\}\times A'$ [illegible] $\begin{cases} h_1=\lambda x\in A'.\langle 0,x\rangle \\ h_2=\lambda x\in B'.\langle 1,x\rangle\end{cases}$ h_1,h_2 [illegible] (*) [illegible] $|A'|=|\{0\}\times A'|$

$h_2:B'\to\{1\}\times B'$ $|B'|=|\{1\}\times B'|$

[illegible] $\forall a\in\{0\}\times A'$, $\forall b\in\{1\}\times B'$ [illegible] $a\neq b$ [illegible]

$(\pi_1(a)=0,\ \pi_1(b)=1)$ [illegible] $A\cap B'=\emptyset$ [illegible]

(*) [illegible] ~~[illegible]~~ h [illegible]

[illegible] $x_1,x_2\in A'$ [illegible] $h_1(x_1)=h_1(x_2)$ [illegible] $\langle 0,x_1\rangle=\langle 0,x_2\rangle$ [illegible] $x_1=x_2$ [illegible] h_1 [illegible]

[illegible] $y\in\{0\}\times A'$ [illegible] $x=\pi_2(y)$ [illegible] $h_1(x)=\langle 0,x\rangle=\langle 0,\pi_2(y)\rangle=y$ [illegible] h_1 [illegible]

[illegible] h_2:

[illegible] $x_1,x_2\in B'$ [illegible] $h_2(x_1)=h_2(x_2)$ [illegible] $\langle 1,x_1\rangle=\langle 1,x_2\rangle$ [illegible] $x_1=x_2$ [illegible] h_2 [illegible]

[illegible] $y\in\{1\}\times B'$ [illegible] $x=\pi_2(y)$ [illegible] $h_2(x)=\langle 1,x\rangle=\langle 1,\pi_2(y)\rangle=y$ [illegible]

h_2 [illegible]

2. (1) [illegible] $b\neq 0$ [illegible] c [illegible] $ac=b$ [illegible] $a\le b$

[illegible] $a\le a\cdot c$ [illegible] $\boxed{c\ge 1}$ $(a\cdot c\ge a\cdot 1=a)$:

$b\neq 0\Rightarrow c\neq 0\wedge a\neq 0$, [illegible] c [illegible] $c\in\mathbb{N}$, $(c\neq 0)\wedge(c\in\mathbb{N})\Rightarrow c\in\mathbb{N}^{+}$

[illegible] $c\ge 1$, [illegible] c [illegible] $n<\aleph_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

[illegible] $\aleph_0\le d$ [illegible] $1\le n<\aleph_0\le c$ [illegible] $c\ge 1$ [illegible]

(2) [illegible] $c=2$ [illegible] $2<\aleph_0$ [illegible] $a=\aleph_0$, $b=\aleph_0$

[illegible] $a=b$ [illegible] $a\not< b$ [illegible] $ac=b$ [illegible]

$$\aleph_0=1\cdot\aleph_0\le 2\cdot\aleph_0\le\aleph_0\cdot\aleph_0\overset{!}{=}\aleph_0$$

[illegible] $2\cdot\aleph_0=\aleph_0$ [illegible] $c\cdot a=b$ [illegible] $a<b$

(3) [illegible] $a=2,\ b=3$. [illegible] c [illegible] $c\in\mathbb{N}$:

$2c=3$ [illegible]

[illegible] c [illegible] $c\cdot 1\cdot c\le 2c$ [illegible] $\aleph_0\le c$ [illegible]

[illegible] $\aleph_0\le 2c$ [illegible] $\aleph_0\le 3$ [illegible]

תשובה לשאלה מס' 2 מס' סטודנט_____

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס' ב

20

B אינסופי,

(2) א. נכון. $|A|\times|A|=|A|$ כי A אינסופית. לכן: $|A\to B|\times|A\to B|=|A\to B|$

[illegible] $|A|=a$, $|B|=b$ ואז $|A\to B|=b^a$. [illegible]

$$b^a\cdot b^a \overset{?}{=} b^a.$$

[illegible] $b^a\cdot b^a=b^{a+a}$. [illegible] $a+a=a$.

$$a=0+a\leq a+a=1\cdot a+1\cdot a=(1+1)\cdot a=2\cdot a\leq a\cdot a=a$$

$0\leq a$ [illegible]   [illegible] $a\geq 2$ $(2\in\mathbb{N})$ [illegible] A [illegible]

[illegible] $a+a=a$ [illegible] $b^a\cdot b^a=b^{a+a}=b^a$

[illegible] $|A\to B|\times|A\to B|=|A\to B|$ [illegible] $|A\to B|$ [illegible]

ב. [illegible] A [illegible] $|A|=1$

[illegible] $1\cdot 1=1$ [illegible] $A=\{7\}$ [illegible] B [illegible]

$|A\times B|\times|A\to B|=|A\to B|$ ($\Leftarrow$ $b\cdot b=b$)

$B=\{A,B\}$

[illegible] $|B|=2$: $2^1\cdot 2^1=4\neq 2^1$

תשובה לשאלה מס׳ 3 מס׳ סטודנט___
במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס׳

20

(3) א.

$$\alpha + \alpha = (3n)!$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3n!}{2}}$$

ב.

$$3!\,\beta = (3n)!$$

$n, 2n, 3n$

$$\beta = \frac{3n!}{3!}$$

ג. $B = \{x \mid \alpha(x)\}$

$f^{-1}(3k), f^{-1}(3k+3)$ $f \in I_n(A_n, A_n)$

$1 \le m \le 3n$ $\forall x \in A_n$

$f(x) \neq m$ $3n-1$ $f(A_n)$ $|A_n| = 3n-1$

$y \in f(A_n)$

$x_1 \neq x_2 \in A_n$ $f(x_1) = f(x_2)$

$$\forall k \in A_n \quad \exists x \in A_n .\ f^{-1}(k) = x$$

[illegible]

$B = \{ A \mid 1 \le k \le n-1 \ \ldots \ 3k \ \ldots \ 3(k+1) \}$

[illegible]

A_n [illegible] A_{n-1}

[illegible] $3n$ [illegible]

[illegible] $(3, 6, \ldots, 3n)$ [illegible]

[illegible] $= \bigcup$ [illegible] $3, 6, \ldots, 3n$ [illegible]

$\left| \bigcup \{ \ldots \} \right| = (\ldots)!$ [illegible]

[illegible] $(3, 6, \ldots, 3n)$ [illegible] n [illegible]

$$(3n)! = n! \cdot \gamma$$

[illegible] $(3, \ldots, 3k, \ldots)$ [illegible]

[illegible] $3 \le 6 \le \ldots \le 3k \le \ldots \le 3n$ [illegible]

$$|B| = \gamma = \frac{(3n)!}{n!}$$

תשובה לשאלה מס' 4 מס' סטודנט 031405749

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס' מחברת 11

(4) א. S אינו יחס סימטרי כי זוג נגדי: לדוגמא:

מתקיים $3S1$ כי קיים $z_1 \in M$ כך ש $3 = z_1 \cdot 1$ ($z_1 = 3$ ולכן $z_1 \in \mathbb{N}^+$ ולכן $z_1 \in M$)

וגם $1S2$, כי קיים $z_2 \in M$ כך ש $1 = z_2 \cdot 2$ ($z_2 = \frac{1}{2}$ ולכן $z_2 \in \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ולכן $z_2 \in M$)

10/10

אבל $\langle 3,2 \rangle \notin S$: ~~...~~ כי $3S2$ לא מתקיים. כי לא קיים $z_3 \in M$ כך ש $3 = 2 \cdot z_3$ ולכן $z_3 = \frac{3}{2} \in M$ וזו סתירה כי $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^+$ וגם $\frac{3}{2} \notin \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

($\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$ ו-$2/3 \notin \mathbb{N}^+$).

ב. (1) $f(0) = \{y \in \mathbb{R} \mid \langle 0,y \rangle \in S\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists z \in M,\ 0 = y \cdot z\}$

ונוכיח $f(0) = \{0\}$ כי אז $y \cdot z = 0$ (*): ~~...~~

אם $y=0$ אז $z \cdot 0 = 0$ $\forall z \in \mathbb{N}^+$ ולכן לדוגמה עבור $z=1$ $z \cdot 0 = 0$ ולכן

$0Sy$ ~~...~~ עבור $y=0$ ולכן $0 \in f(0)$.

אם ~~...~~ $y \neq 0$ אז $\underbrace{}_{\text{מתקיים לפי (*)}}$ $z=0$ אבל $0 \notin M$, כי $0 \notin \mathbb{N}^+$ וגם

$0 \notin \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$ (לכל $n \in \mathbb{N}^+$ $\frac{1}{n} > 0$ ולכן $\frac{1}{n} \neq 0$) ולכן $\langle 0,y \rangle \notin S$ $\forall y \neq 0$

ולכן $f(0) = \{0\}$.

5/5

(2) נוכיח: $\mathbb{N}^+ \subseteq f(\frac{1}{2})$, ולכן נוכיח $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $n \in f(\frac{1}{2})$

ולכן נוכיח: $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $n \in \{y \in \mathbb{R} | \langle \frac{1}{2}, y \rangle \in S\}$

" " : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\langle \frac{1}{2}, n \rangle \in S$

" " : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\exists z \in M.$ $\frac{1}{2} = n \cdot z$

נבחר $z = \frac{1}{2n}$. מאחר ו-$n \in \mathbb{N}^+$ אז גם $2n \in \mathbb{N}^+$ ולכן $z \in \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$

5/5

ולכן קיים $z \in M$ כך ש $\frac{1}{2} = n \cdot z$, ולכן $n \in f(\frac{1}{2})$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

20/20

$\frac{20}{20}$

תשובה לשאלה מסי 5 מסי סטודנ

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף

5) א. f פונק׳ [illegible] : $n \in \{n \in N / 0 \le n \le 100\}$

[illegible] $\{A,B,C,D\}$ [illegible] $\{A\},\{B\}$

[illegible]

[illegible] $f^{-1}(\{A\}) \cap f^{-1}(\{B\}) = \emptyset$ [illegible] f [illegible]

G [illegible] 101 [illegible] $\{A,B,C,D\}$ [illegible]

[illegible] $|A| = 4^{101}$ ✓

$\frac{10}{10}$

ב.

$$\{ f : \{n \in N / 0 \le n \le 100\} \to \{A,B,C,D\} \mid |f^{-1}(\{A\})| \in N_{even} \} = \{ G \text{ [illegible] } 101 \text{ [illegible] } A \text{ [illegible]} \}$$

[illegible] $a_n = n$ [illegible] (A [illegible] G [illegible])

$\boxed{B/C/D \mid a_{n-1}} \to 3a_{n-1}$ ✓

$\boxed{A \mid \text{[illegible]}} \to$ [illegible] $= 4^{n-1} - a_{n-1}$ ✓

[illegible]

$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-1} + 4^{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ (*)

$a_n^{(h)} = x^n$ [illegible]

[illegible] $x - 2 = 0$ [illegible] $x_1 = 0, x_2 = 2$

[illegible] $a_n^{(h)} = \alpha \cdot 2^n$

[illegible] $a_n^{(p)} = \beta \cdot 4^n$ [illegible] (*) $\beta 4^n - \beta 2 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

[illegible] $4\beta - 2\beta = 1$

[illegible] $\beta = \frac{1}{2}$ [illegible] $a_n^{(p)} = \frac{1}{2} 4^n$

[illegible] $a_0 = 1$ ([illegible] A [illegible] G [illegible])

[illegible] $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2} 4^n$: $1 = \alpha + \frac{1}{2}$ [illegible] $\alpha = \frac{1}{2}$

[illegible] $a_n = \frac{2^n + 4^n}{2}$

[illegible] 101 $(n = 101)$: $a_{101} = \frac{2^{101} + 4^{101}}{2}$

$\frac{10}{10}$

תשובה לשאלה מס׳ 6 מס׳

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של ו

טו/טו

6) א. G בהכרח עץ כי: נסמן T_2 $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$. T_1,T_2 עצים לכן $|E_1|=n_1-1$, $|E_2|=n_2-1$

(לפי המשפט T עץ $\Leftarrow |E|=|V|-1$). נוכיח כי G קשיר: T_1,T_2 עצים לכן

קשירים, כלומר בין כל $x,y\in V_1$ קיים מסלול ובין כל $x,y\in V_2$ קיים מסלול. יהיו x,y

צמתים ב-G, כלומר $x,y\in V_1\cup V_2$. אם $x,y\in V_1$ אז סיימנו (כי T_1 קשיר) אם $x,y\in V_2$

אז סיימנו (כי T_2 קשיר). אם $x\in V_1$, $y\in V_2$ (ובהכללה אותו דבר להפך) אז: בגלל $V_1\cap V_2=\{v\}$:

קיים מסלול בין x ל-v (קשיר T_1) ובין y ל-v (קשיר T_2) לכן קיים מסלול בין x ל-y.

x,y שרירותיים לכן G קשיר. כמו כן G גרף פשוט. כי T_1,T_2 הם גרפים פשוטים (1)

מספר צמתים G שווה: $|V_1\cup V_2| = |V_1|+|V_2|-|V_1\cap V_2| = n_1+n_2-1$

כמו כן, מ-$V_1\cap V_2=\{v\}$ נובע כי $E_1\cap E_2=\emptyset$, אחרת קיימת $e=\langle v,u\rangle\in E_1\cup E_2$

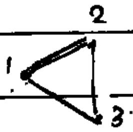
כך ש $\{v,u\}\subseteq V_1$, $\{v,u\}\subseteq V_2$ כלומר $V_1\cap V_2\neq\{v\}$ ובסתירה לנתון. מכאן:

$$|E_1\cup E_2| = \underbrace{|E_1|}_{n_1-1}+\underbrace{|E_2|}_{n_2-1}-\underbrace{|E_1\cap E_2|}_{0} = n_1-1+n_2-1 = (n_1+n_2-1)-1 = |V_1\cup V_2|-1$$

ולפי המשפט (H קשיר ופשוט ומקיים $|E|=|V|-1 \Leftarrow$ H עץ) נקבל כי: G עץ

ב. G אינו עץ בהכרח. לדוגמא: נניח $V_1=\{1,2,3\}$, $E_1=\{\langle1,2\rangle,\langle2,3\rangle\}$ - עץ

$V_2=\{1,2,3\}$, $E_2=\{\langle1,2\rangle,\langle1,3\rangle\}$ - עץ



ומקיים $E_1\cap E_2=\{e\}=\{\langle1,2\rangle\}$ $G=\{\{1,2,3\},\{\langle1,2\rangle,\langle1,3\rangle,\langle2,3\rangle\}\}$ וקיבלנו ב-G מעגל,

כלומר G אינו עץ

10/10

10/10

בהוכחה (1): גרפים פשוטים שמתוארים לא כל עץ פשוט: כי ב-H_1 אין לולאות, וב-H_2 אין לולאות. לכן ב-G אין לולאות, וקשתות כפולות ב-H_1 ו-H_2 "משתמשות" ...

פונקציות יוצרות התכונות היסודיות

נניח: $\lambda x.F(x)$ יוצרת את $\lambda n.a_n$

$\lambda x.G(x)$ יוצרת את $\lambda n.b_n$

אז:

(1)	$\lambda x.\alpha F(x)+\beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\alpha a_n+\beta b_n$
(2)	$\lambda x.x^m\cdot F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n<m\\ a_{n-m} & n\geq m\end{cases}$
(3)	$\lambda x.\frac{F(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{m-1}x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.c^n a_n$
(5)	$\lambda x.F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}a_{\frac{n}{m}} & n/m\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$
(6)	$\lambda x.F(x)\cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\frac{F(x)}{1-x}$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k$
(8)	$\lambda x.F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.(n+1)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.x\cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.na_n$
(10)	$\lambda x.\int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0\end{cases}$

פונקציות יוצרות: דוגמאות חשובות

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה בתלי פורמלית
(1)	$\lambda x.x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\frac{1}{1-x}$	$\lambda n.1$	$\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\frac{1}{1+x}$	$\lambda n.(-1)^n$	$\langle 1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\frac{1}{1-cx}$	$\lambda n.c^n$	$\langle 1,c,c^2,c^3,c^4,\ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.(1+x)^\alpha$	$\lambda n.\binom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1,\alpha,\binom{\alpha}{2},\binom{\alpha}{3},\binom{\alpha}{4},\ldots\right\rangle$
(6)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\binom{n+\alpha-1}{n}$	$\left\langle 1,\binom{\alpha}{1},\binom{\alpha+1}{2},\binom{\alpha+2}{3},\ldots\right\rangle$
(7)	$\lambda x.\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\binom{n+m}{m}$	$\left\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots\right\rangle$
(8)	$\lambda x.\frac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.n$	$\langle 0,1,2,3,4,\ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.-\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{1}{n} & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\rangle$
(10)	$\lambda x.e^{ax}$	$\lambda n.\frac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1,a,\frac{a^2}{2!},\frac{a^3}{3!},\frac{a^4}{4!},\ldots\right\rangle$
(11)	$\lambda x.\cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\frac{a^n}{n!} & \text{זוגי} - n\\ 0 & \text{אי זוגי} - n\end{cases}$	$\left\langle 1,0,\frac{a^2}{2!},0,\frac{a^4}{4!},0,\ldots\right\rangle$
(12)	$\lambda x.\sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & \text{זוגי} - n\\ \frac{a^n}{n!} & \text{אי זוגי} - n\end{cases}$	$\left\langle 0,a,0,\frac{a^3}{3!},0,\frac{a^5}{5!},\ldots\right\rangle$

טבלת מס' ד.3 כוללת את עשר הזהויות הבינומיאליות החשובות ביותר. בטבלה זו a, b, x, y, α הם מספרים ממשיים כלשהם; n, m, k – מספרים טבעיים. בצד ימין רשומים תנאים לנכונותן של הזהויות משמאל.

טבלה ד.3:
זהויות בינומיאליות חשובות

	תנאים	
(1)	$k \le n$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2)	$k \ge 1$	$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$
(3)	$\alpha \in \mathrm{N} \vee \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert < 1$	$(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^{k}$
(4)		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = 2^{n}$
(5)	$n \ge 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \binom{n}{k} = 0$
(6)		$\binom{-x}{k} = (-1)^{k} \binom{x+k-1}{k}$
(7)	$k \le n$	$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$
(8)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$
(9)	$m \le n$	$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
(10)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$