XX-49

מבחן במתמטיקה בדידה

מועד א' סמסטר ב' תשס"ד, 2004/6/18
מרצה: עודד רגב
משך המבחן: שלוש שעות
אסור השימוש בכל חומר עזר
הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט
שתי התשובות הטובות תחשבנה כ־30 נקודות כל אחת
שאר שתי התשובות תחשבנה כ־20 נקודות כל אחת

1. (א) מצא את העוצמות

$$|\{f \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\ f(a) \neq f(b) \vee a = b\}|$$

$$|\{f \in \mathbb{R} \to \{0,1\} \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) = f(x+1)\}|$$

(ב) יהי n מספר זוגי. מצא את העוצמה

$$\left|\left\{f \in \{1,2,\ldots,n\} \to \{0,1\} \;\middle|\; \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.\ \sum_{j=1}^{i} f(j) \geq \frac{i}{2} \ \wedge\ \sum_{j=1}^{n} f(j) = \frac{n}{2}\right\}\right|$$

(ג) הראה שלכל קבוצה אינסופית A קיימת תת־קבוצה אינסופית B כך ש־$|P(A\setminus B)| > |A|$.

2. נגדיר

$$S = \{(A,B) \in P(\mathbb{Q}) \times P(\mathbb{Q}) \mid \exists f \in A \to B.\ \text{חח"ע ועל } f\}$$

(א) הראה ש־S הוא יחס שקילות. על איזו קבוצה?

(ב) מצא את מחלקת השקילות $[\{1,4,9\}]_S$ ואת עוצמתה.

(ג) מהי קבוצת המנה? מה עוצמתה? הקפד להסביר בפירוט.

(ד) מה ניתן היה להגיד על קבוצת המנה אם היינו מחליפים את $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$ בהגדרה של S?

3. (א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ \forall n \geq 2.\ a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 6$$

(ב) יהי n מספר טבעי. חשב את מספר התמורות $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ על n איברים שמקיימות שלכל $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\pi(k) - k$ הוא מספר זוגי (המספרים הזוגיים הם $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$).

4. (א) יהי n מספר טבעי. מצא את מספר הפתרונות של

$$a + b + c = n$$

כאשר $a,b,c \geq 0$ הם מספר טבעיים שונים זה מזה.

(ב) הראה שמספר הסדרות באורך n שמכילות k אחדים ו־$n-k$ אפסים שאין בהן שני אחדים רצופים הוא

$$\binom{n-k+1}{k}$$

בהצלחה!!!

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת	כתיבה לא פורמלית
(1)	$\lambda x.\ x^m$	$\lambda n.\begin{cases}1 & n=m\\0 & n\neq m\end{cases}$	$\langle 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots\rangle$
(2)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-x}$	$\lambda n.\ 1$	$\langle 1, 1, 1, 1, \ldots\rangle$
(3)	$\lambda x.\dfrac{1}{1+x}$	$\lambda n.\ (-1)^n$	$\langle 1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots\rangle$
(4)	$\lambda x.\dfrac{1}{1-cx}$	$\lambda n.\ c^n$	$\langle 1, c, c^2, c^3, c^4, \ldots\rangle$
(5)	$\lambda x.\ (1+x)^\alpha$	$\lambda n.\binom{\alpha}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \binom{\alpha}{2}, \binom{\alpha}{3}, \ldots\right\rangle$
(6)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$	$\lambda n.\binom{\alpha+n-1}{n}$	$\left\langle 1, \alpha, \binom{\alpha+1}{2}, \binom{\alpha+2}{3}, \ldots\right\rangle$
(7)	$\lambda x.\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$	$\lambda n.\binom{m+n}{m}$	$\left\langle 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots\right\rangle$
(8)	$\lambda x.\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$\lambda n.\ n$	$\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$
(9)	$\lambda x.-\ln(1-x)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\1/n & n>0\end{cases}$	$\left\langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\rangle$
(10)	$\lambda x.\ e^{ax}$	$\lambda n.\dfrac{a^n}{n!}$	$\left\langle 1, a, \frac{a^2}{2!}, \frac{a^3}{3!}, \ldots\right\rangle$
(11)	$\lambda x.\ \cosh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}\dfrac{a^n}{n!} & n \text{ זוגי}\\0 & n \text{ איזוגי}\end{cases}$	$\left\langle 1, 0, \frac{a^2}{2!}, 0, \frac{a^4}{4!}, \ldots\right\rangle$
(12)	$\lambda x.\ \sinh(ax)$	$\lambda n.\begin{cases}0 & n \text{ זוגי}\\\dfrac{a^n}{n!} & n \text{ איזוגי}\end{cases}$	$\left\langle 0, a, 0, \frac{a^3}{3!}, 0, \frac{a^5}{5!}, 0\ldots\right\rangle$

$\alpha a_n + \beta b_n$	יוצרת את	$\lambda x.\ \alpha F(x) + \beta G(x)$	(1)
$\begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & n \geq m \end{cases}$	יוצרת את	$\lambda x.\ x^m . F(x)$	(2)
a_{n+m}	יוצרת את	$\lambda x. \dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-1} x^{m-1}}{x^m}$	(3)
$c^n a_n$	יוצרת את	$\lambda x.\ F(cx)$	(4)
$\begin{cases} a_{\frac{n}{m}} & m \setminus n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	יוצרת את	$\lambda x.\ F(x^m)$	(5)
$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	יוצרת את	$\lambda x.\ F(x) \cdot G(x)$	(6)
$\sum_{k=0}^{n} a_k$	יוצרת את	$\lambda x. \dfrac{F(x)}{1-x}$	(7)
$(n+1) a_{n+1}$	יוצרת את	F'	(8)
$n a_n$	יוצרת את	$\lambda x.\ x \cdot F'(x)$	(9)
$\begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{a_{n-1}}{n} & n > 0 \end{cases}$	יוצרת את	$\lambda x. \int_0^x F(t)dt$	(10)

	תנאים	
$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$	$k\le n$	(1)
$\binom{x}{k}=\binom{x-1}{k}+\binom{x-1}{k-1}$	$k\ge 1$	(2)
$(a+b)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}a^{\alpha-k}b^{k}$	$\alpha\in\mathbf{N}\vee\left\lvert\frac{b}{a}\right\rvert<1$	(3)
$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}=2^{n}$		(4)
$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{n}{k}=0$	$n\ge 1$	(5)
$\binom{-x}{k}=(-1)^{k}\binom{x+k-1}{k}$		(6)
$\binom{x}{n}\binom{n}{k}=\binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$	$k\le n$	(7)
$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}=\binom{x+n+1}{n}$		(8)
$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$	$m\le n$	(9)
$\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}=\binom{x+y}{n}$		(10)

1127 — 1129

6

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

30/30 -3

21/30 -9

6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון ____
המחברת נבדקה ביום ____
חתימת המורה ____

תאריך הבחינה 18.06.04
שם הקורס מתמטיקה בדידה
שם המורה [illegible]
החוג/המגמה מתמטיקה

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

63218

03681118161
320523491 6

~~שאלה מס' 6~~

~~קודם כל $|\{f\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\mid \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\ f(a)\neq f(b)\vee a=b\}|\le|\{f\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\}|=\aleph_0^{\aleph}$~~

~~$2^{\aleph}\le\aleph_0^{\aleph}\le\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$~~

~~לכן $\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$~~

~~כעת נוכיח כי $|\{f\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\mid\forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\ f(a)\neq f(b)\vee a=b\}|\ge 2^{\aleph}$~~ :

~~לשם כך נבנה פונקציה חח"ע מהקבוצה~~

~~של הקבוצה הנתונה~~ f

<u>שאלה מס' 7</u>

(א) * הקבוצה הנ"ל היא קבוצת כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{Q}$ שהן חח"ע (כי התנאי שקול לכך ש- $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$). כעת עוצמת $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ היא $\aleph-\aleph_0=\aleph$ ועוצמת של $\mathbb{Q}$ היא $\aleph_0$ לכן (מכיוון ש- $\aleph>\aleph_0$) אין פונקציות חח"ע מ- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{Q}$. לכן עוצמת הקבוצה הנתונה היא 0.

~~נבנה פונקציה חח"ע g מהקבוצה~~ ~~$A=\{f\in\mathbb{R}\to\{0,1\}\mid\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=f(x+1)\}$~~

: ~~$[0,1)\to\{0,1\}$~~

* נסמן $A=\{f\in\mathbb{R}\to\{0,1\}\mid\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=f(x+1)\}$

אזי $A\subseteq\mathbb{R}\to\{0,1\}$ ולכן $|A|\le|\mathbb{R}\to\{0,1\}|=2^{\aleph}$.

נגדיר $g: A\to([0,1)\to\{0,1\})$

ע"י כך שעבור $f\in A$ נגדיר $g(f)\in[0,1)\to\{0,1\}$ ע"י $\forall x\in[0,1)\ \ g(f)(x)=f(x)$; הפונקציה g היא חח"ע (כי אם נניח $g(f_1)=g(f_2)$ אזי $f_1|_{[0,1)}=f_2|_{[0,1)}$ ולכן $f_1(x)=f_2(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$: כי אם נגדיר $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ כאשר $\lfloor x\rfloor$ הוא החלק השלם של x ו- $\{x\}$ הוא החלק השברי של x אזי

$$f_1(x)=f_1(\lfloor x\rfloor+\{x\})=f_1(\lfloor x\rfloor-1+\{x\})=\dots=f_1(\{x\})=f_2(\{x\})=\dots=f_2(x)$$

ולכן $f_1=f_2$).

מכאן $|A| \geq |[0,1) \to \{0,1\}| = 2^{\aleph}$

לכן $|A| = 2^{\aleph}$

~~לפי ההגדרה של המושג "קבוצה אינסופית" קיימת ל-A תת-קבוצה C בעוצמה השווה לעוצמת A.~~
~~נתבונן ב- $B = A \setminus C$. אזי $A \setminus B = C$~~
~~לכן $|P(A \setminus B)| = |P(C)| = 2^{|C|} = 2^{|A|}$~~
~~לכן $|P(A \setminus B)| = 2^{|A|} > |A|$ (משפט Cantor)~~

ב) נתבונן בשני מקרים:

א) $|A| = \aleph_0$ אזי נוכל לרשום $A = \{a_1, a_2, \ldots\} = \{a_i \mid i \geq 1\}$

אזי ניקח $B = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\}$; $|B| = \aleph_0$

אזי $|A \setminus B| = |\{a_2, a_4, \ldots\}| = |A| = \aleph_0$ (התאמה $a_{2i} \leftrightarrow a_i$)

לכן $|P(A \setminus B)| = 2^{|A \setminus B|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = |A|$ (משפט Cantor)

ב) $|A| > \aleph_0$ אזי קיימת $B \subseteq A$, $|B| = \aleph_0$ (כי קיימת פונקציה חח"ע $f: \mathbb{N} \to A$ לכן אם ניקח $B = f(\mathbb{N})$ אזי $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$)

אזי $|A \setminus B| = |A| - \aleph_0 = |A|$ לכן $|P(A \setminus B)| = 2^{|A \setminus B|} = 2^{|A|} > |A|$ (משפט Cantor)

סעיף ה

~~3 סעיף ב~~

~~המשוואה האופיינית של הנסיגה היא~~ $\cancel{\alpha^2-3\alpha-4=0}$

~~השורשים הם~~ $\cancel{\alpha=-1,\ \alpha=4}$

~~לכן הפתרון של הנסיגה ההומוגנית הוא~~ $\cancel{b_n = a\cdot(-1)^n + b\cdot 4^n}$

~~נמצא כעת את הפתרון הפרטי של הנסיגה~~

$\cancel{c\cdot n^2}$

~~נציב~~ $\cancel{\forall n\geq 2 \quad c n^2 = 3c\cdot(n-1)^2+4c(n-2)^2+6}$

$\cancel{\forall n\geq 2 \quad c n^2 = 7cn^2 - 6cn + 16cn}$

<u>סעיף 3</u>

נגדיר $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

אז

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1 x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= a_0+a_1x+3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n+4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n+6\sum_{n=2}^{\infty} x^n =$$

$$= 2+x+3\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}+4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}+6\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)=$$

$$= 2+x+3x\left(F(x)-2\right)+4x^2F(x)+6\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)$$

לכן

$$F(x)\left(1-3x-4x^2\right)= 2+x-6x-6-6x+\frac{6}{1-x}$$

אז

$$F(x)=\frac{-4-11x}{1-3x-4x^2}+\frac{6}{(1-x)(1-3x-4x^2)}$$

אז

$$F(x)=-\frac{11x+4}{(1+x)(1-4x)}+\frac{6}{(1-x)(1+x)(1-4x)}$$

נפרק

$$\frac{11x+4}{(1+x)(1-4x)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-4x}=\frac{A-4Ax+B+Bx}{(1+x)(1-4x)}$$

לכן

$$\begin{cases} A+B=4 \\ -4A+B=11 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$5A=-7$

$5B=27$

$\Downarrow$

$A=-\frac{7}{5}$

$B=\frac{27}{5}$

נציג

$$\frac{6}{(1-x)(1+x)(1-4x)} = \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x} + \frac{E}{1-4x} =$$

$$= \frac{C(1+x)(1-4x) + D(1-x)(1-4x) + E(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)(1-4x)}$$

נציב $x=1$ במונה ונקבל $6 = C\cdot(-6)$

$C \overset{\Downarrow}{=} -1$

נציב $x=-1$ במונה ונקבל $6 = D\cdot 10$

$\Downarrow$

$D = \frac{3}{5}$

נציב $x=\frac{1}{4}$ במונה ונקבל $6 = E\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)$

לכן $E = \frac{32}{5}$

מכאן $F(x) = \left(\frac{7}{5} + \frac{3}{5}\right)\frac{1}{1+x} + \left(\frac{32}{5} - \frac{27}{5}\right)\frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-x}$

או $F(x) = 2\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-x}$

לכן $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n + 4^n - 1\right)$

~~לכן $a_n = \frac{59}{5}\cdot 4^n - \frac{4}{5}(-1)^n - 1$~~

לכן $\boxed{a_n = 2(-1)^n + 4^n - 1 \quad \forall n\geq 0}$

15/15

(ג) התמורות תמורות כאלה הם בדיוק התמורות שבהן מספר זוגי עובר למספר זוגי ומספר אי-זוגי – לאי-זוגי. ~~כמות התמורות כאלה:~~

~~* אם n=2k הוא זוגי אז למספר זוגי יש k אפשרויות~~

~~אחר כך לבא יש k-1 אפשרויות וכך הלאה~~

כלומר צריך לסדר מחדש זוגיים במקומות זוגיים ולסדר מחדש אי-זוגיים במקומות אי-זוגיים.

אם $n=2k$ יש k זוגיים ו-k אי-זוגיים והמספר הוא $k!\cdot k! = \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$

אם $n=2k+1$ יש $k+1$ אי-זוגיים ו-k זוגיים והמספר הוא $k!(k+1)! = \left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!$

סה"כ המספר הוא

$$\begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)!^2, & n \text{ זוגי} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!, & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

✓

15

15/15

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

שאלה מס' 2

(א) נוכיח את זה:

רפלקסיביות: $A S A$ לכל $A \in P(Q)$ כי ניקח

פונקציה $I : A \to A$ המוגדרת ע"י $I(x) = x$ $\forall x \in A$.

אזי היא חח"ע ועל.

סימטריות: נניח $A S B$. אזי קיימת $f : A \to B$ חח"ע

ועל. לכן f היא הפיכה. לכן $f^{-1} : B \to A$ הפיכה.

לכן היא בפרט חח"ע ועל. לכן $B S A$

טרנזיטיביות: נניח $A S B$, $B S C$. אזי קיימת $f : A \to B$ חח"ע

ועל (בפרט הפיכה, וההפכית שלה f^{-1}) ו- $g : B \to C$ חח"ע ועל

(בפרט הפיכה וההפכית שלה g^{-1}). אזי $g \circ f : A \to C$

היא הפיכה (ההפכית שלה $f^{-1} \circ g^{-1}$) ובפרט חח"ע ועל ולכן

$A S C$.

לכן זהו יחס שקילות.

זהו יחס שקילות על $P(Q)$.

(ב) $A S B \Leftrightarrow$ f חח"ע ועל. $\exists f \in A \to B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

לכן $\{1,4,9\} S B \Leftrightarrow |B| = 3$.

לכן $[\{1,4,9\}]_S = \{ A \in P(Q) \mid |A| = 3 \}$

כלומר כל תתי-קבוצות של Q בנות 3 איברים.

ולכן: $\aleph_0 \le |[\{1,4,9\}]_S| \le |Q \times Q \times Q| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$\{ \{a,0,1\} \mid a \in Q - \{0,1\} \} \subseteq [\{1,4,9\}]_S$

$\aleph_0 = |\{ \{a,0,1\} \mid a \in Q - \{0,1\} \}|$

לכל קבוצה B, $|B| = 3$ נגדיר שלישיה סדורה המורכבת משלושת איברי B. אזי ההתאמה חח"ע

לכן $|[\{1,4,9\}]_S| = \aleph_0$

(ג) קבוצת המנה היא

$$P(Q)/S = \{ [A]_S \mid A \in P(Q) \} = \{ [Q]_S, [\emptyset]_S, [\{0\}]_S, [\{0,1\}]_S, \dots, [\{0,1,\dots,n\}]_S, \dots \}$$

ובפרט $|P(Q)/S| = \aleph_0$ (כי מנינו את איבריה)

הסבר: כל ~~...~~ תת-קבוצה ב- $P(Q)$ היא או אינסופית
ואז עוצמתה $\aleph_0$ ואז היא שייכת ל- $[Q]_s$
או עוצמתה סופית $n \neq 0$ ~~...~~ ואז היא שייכת ל- $[\{0,\dots,n-1\}]_s$
או עוצמתה 0 ואז היא ϕ ולכן שייכת ל- $[\phi]_s$.
כמו כן ברור שאין פונקציה חד-ערכית (איזומורפיזם) בין קבוצות
בעלות קרדינליות שונה, לכל $n \neq m$ $[\{0,\dots,n\}]_s \neq [\{0,\dots,m\}]_s$
וגם לכל n $[\phi]_s \neq [\{0,\dots,n\}]_s \neq [Q]_s \neq [\phi]_s$.

(ג) אילו היינו מקבלים ~~...~~ קבוצה איזומורפית לקבוצת כל העוצמות שקטנות או שוות ל- $\aleph$ שהיא ~~...~~ בהנחת אקסיומת הרצף $\{\aleph, \aleph_0, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
(בלי הנחת אקסיומת הרצף לא נוכל לדעת מה זאת הקבוצה).

שאלה 7.

ב

כמות הפתרונות של $a+b+c=n$ בלי הנחה $a\neq b$, $b\neq c$, $a\neq c$

הוא כמספר דרכים לפזר n כדורים ב-3 תאים זה $\binom{n+2}{2}$.

~~כמות מספר פתרונות של $n=a+b+c$ אם לספור~~

~~2 מהמספרים a,b,c שווים הוא~~ $\binom{3}{2}$

מכאן נתבונן בשני מקרים:

א) n מתחלק ב-3.

אז יש אפשרות 1 אם $a=b=c$

יש $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ אפשרויות אם $a=b\neq c$ (כי צריך עבור $a=b$ לבחור מבין המספרים $\{0,1,\dots,\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\}\setminus\{\frac{n}{3}\}$)

ובאופן סימטרי עבור $a=c\neq b$, $(a\neq b=c)$

לכן סה"כ האפשרויות הוא $\binom{n+2}{2}-3\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-1$

כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא החלק השלם של x.

ב) n לא מתחלק ב-3 אז אין אפשרות $a=b=c$

יש $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1$ אפשרויות כאשר $a=b\neq c$

ובאופן סימטרי אם $a=c\neq b$, $a\neq b=c$

לכן כמות האפשרויות הוא $\binom{n+2}{2}-3\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-3$

תשובה: כמות פתרונות $= \begin{cases} \binom{n+2}{2}-3\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-1, & n \vdots 3 \\ \binom{n+2}{2}-3\lfloor \frac{n}{2}\rfloor-3, & n \not\vdots 3,\ n\geq 4 \end{cases}$

במקרים גבוליים כאשר $n=0$ – אין פתרונות, $n=1$ – אין פתרונות

$n=2$ – אין פתרונות

~~כמות סדרות כאלו שלא מתחלקות ב-ר ולא מתחילות ב-1 שווה למספר אפשרויות להכניס את n כדורים ל-$k+1$ תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד פחות מספר האפסים בין אחדים רצופים~~

ⓑ נתבונן בסדרה 10101-0101 יש בה k אחדים ו-$k-1$ אפסים. הבעיה שלנו שקולה לכמות אפשרויות להכניס את האפסים הנותרים ($n-2k+1$ אפסים) לתוך הרווחים הבאים: $\_10\_10\_10....\_1\_$. סה"כ יש לנו

רווחים

$k+1$ רווחים כלומר צריך להכניס $n-2k+1$ כדורים לתוך $k+1$ תאים. כלומר יש סה"כ

$$\binom{(n-2k+1)+(k+1)-1}{(k+1)-1} = \binom{n-k+1}{k}$$

התשובה שונה מהגדרה - מה קורה באופן כללי - הסבר למשהו? משל מדוע $k+1$ רווחים בין 10 ועקיף 1?

$\frac{6}{15}$

שאלה 1, סעיף ב.

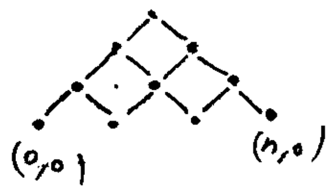
נתאים לכל $f\in\{1,2,\dots,n\}\to\{0,1\}$ פונקציה $g\in\{1,2,\dots,n\}\to\{-1,1\}$

ע"י $g(k)=2f(k)-1$

אז g מקיימת $\sum_{k=0}^{n} g(k)=0 \wedge \sum_{k=0}^{i} g(k)\geq 0$ $\forall_{1\leq i\leq n}$.

כמות פונקציות כאלה שווה לכמות הדרכים להגיע מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(n,0)$ ע"י צעדים $(x,y)\mapsto(x+1,y+1)$ ו- $(x,y)\mapsto(x+1,y-1)$ בלי להגיע מתחת לציר ה- x.

ציור:



אז נסמן ב- $a_{\frac{n}{2}}$ את כמות הדרכים המותרות מ- $(0,0)$ ל- $(n,0)$.

אז a מקיימת נוסחת נסיגה הבאה:

$$a_k = a_0 a_{k-1} + a_1 a_{k-2} + a_2 \cdot a_{k-3} + \dots + a_{k-2}\cdot a_1 + a_{k-1}$$

כאשר $a_0=1$;

כלומר $a_0=1$, $a_k=\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-i-1}$.

וזאת מכיוון שכדי להגיע ל- $(0,n)$ צריך קודם להגיע למקום הראשון בו נוגע בציר ה- x, נסמנו $(2l,0)$ ואז להגיע ממקום זה ל- $(n,0)$. כמות הדרכים להגיע למקום $(2l,0)$ בלי לגעת קודם את ציר ה- x היא a_{l-1} ולהגיע ממקום $(2l,0)$ למקום $(n,0)$ - $a_{\frac{n}{2}-l}$.

כידוע הסדרה המוגדרת ע"י כלל נסיגה זה היא סדרת מספרי קטלן.

כלומר $k\geq 1$, $a_k=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(k+1)!}2^k$

$a_0=1$

(הוכחה שזו הנוסחא הנכונה:

$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

$\Downarrow$

$F(x)^2=\frac{F(x)-a_0}{x}=\frac{F(x)-1}{x}$

$\Downarrow$

$1-\sqrt{1-4x} = 1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}4^k x^k$

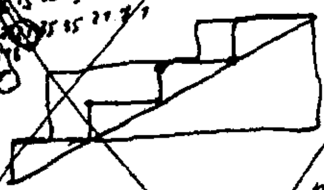
$1\ 2 \dots n$

$\frac{n}{2}$

$a_{n+1} = a_n \cdot a_1 + a_{n-1} \cdot a_2 + \dots + a_1 \cdot a_n$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$n/2$



$F(x) = \sum a_n x^n$

$F(x) \cdot F(x) = \sum \left(\sum a_k a_{n-k}\right) x^n$

a_{n+1}

1
1
1 2
5 5
$k=$ 14
42
132

$2^3 + \frac{38}{4}$

$42 + 14 + 10$

$a_n = a_{n-2} +$
$+ a_{n-2} \cdot a_0 +$
$+ a_{n-4} \cdot a_2 + \dots$
$+ a_2 a_{n-4}$

$2 \cdot \overset{2}{3} \cdot \frac{7}{9}$

$2^{\cancel{4}} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}$

$\frac{20}{3}$

$a_{n+2} = a_n + b_n$

$b_n = a_{n-2} \cdot 3 + b_{n-2} \cdot 3 +$

$k \quad 3$

$(a_1 \cdot x + a_2 x + 1)x + 1 = F$

$\boxed{F^2 = \frac{F-1}{x}}$

0

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 2 + 2 + 1 = 5$

$a_4 = 5 + 4 + 5 = 14$

$a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_1 +$
$+ a_2 \cdot a_1$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$

$1 \cdot 2 \cdot 3$

$(2k-1)(2k-3)(2k-5) \dots 1 \cdot 2^{k-1}$

$(n+1)$

$(n-1)$

$k = 2$

$3 \cdot 1 \cdot$

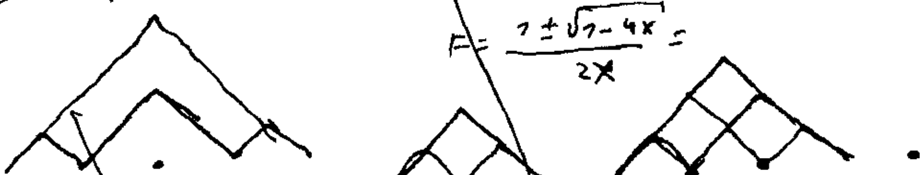
$5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot$

$k = 2$

$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$xF^2 - F + 1 = 0$

$F = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$



$k = 3$

$\frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

$k = 4$

$\frac{\cdot 3 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56
19 36 84 126 126

$\frac{n^2!}{n!\,n!}$

1 1 2 3

a_{n+2}

$a_2 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2$

$a_0 \cdot a_3$

$F^2 = \frac{F}{x} - 1$

$xF^2 - F + x = 0$

$F = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x}$

$(1-4x^2)$

$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k x^k$

$\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-\right)}{k!}$

$\frac{2^k}{2^k}$

$2x$

$\frac{1 \cdot (1-2)(1-4)}{2^k}$

$2k-1$

-1