מתמטיקה בדידה
א. אברון, י. הירשפלד, י. רודיטי

סמסטר א' תשס"ד
מועד ב' 9.09.04

משך הבחינה שלוש שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

> לגליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתיבת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.

כמקובל, האותיות N, R ו-Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.
בבחינה **שש** שאלות. *יש לענות על כל השאלות.* ערך מכסימלי לתשובה *נכונה* לשאלה הוא 20% .
למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.

1. א. הוכיחו כי חיבור עוצמות מוגדר היטב.

ב. תהיינה a, b עוצמות. הוכיחו או הפריכו:
(i) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c כך ש-$ac = b$, אזי $a \leq b$.
(ii) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c, $c > 1$, כך ש-$ac = b$, אזי $a < b$.
(iii) אם $b \neq 0$ ו- $a \leq b$ אזי קיימת עוצמה c כך ש-$ac = b$.

2. קבוצה A תקרא __תקינה__ אם $|A| \times |A| = |A|$.

א. הוכיחו כי אם A קבוצה אינסופית ותקינה, וכן B קבוצה, אזי הקבוצה $A \to B$ היא קבוצה תקינה.

ב. האם (א) נכון **ללא** התנאי ש-A אינסופית?

3. תהי, $A_n = \{ k \in N \mid 1 \leq k \leq 3n \}$.

א. בכמה מהתמורות של אברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $3n$ (__לאו__ דווקא צמוד לו).

ב. בכמה מהתמורות של אברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $2n$ ואילו האיבר $2n$ מופיע משמאלו של האיבר $3n$ (שוב: __לאו__ דווקא בצמידות זה לזה).

ג. נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$B_n = \{ f \in In(A_n, A_n) \mid \forall 1 \leq k \leq n-1 , f^{(-1)}(3k) \leq f^{(-1)}(3k+3) \}.$$

הוכיחו כי הקבוצה B_n מוגדרת היטב, וחשבו את עוצמתה.

(__תזכורת:__ הסימון $In(A,B)$ הוא של קבוצת __כל__ הפונקציות החח"ע מהקבוצה B לקבוצה A.)

XX_51

4. תהי $M = N^+ \cup \{ 1/n \mid n \in N^+ \}$. נגדיר יחס: $S = \{ \langle x,y \rangle \in R^2 \mid \exists z \in M ,\ x = yz \}$.

א. האם S הוא יחס שקילות? נמקו!

ב. נגדיר פונקציה: $f = \lambda x \in R .\ \{ y \in R \mid \langle x,y \rangle \in S \}$.

(i) חשבו את $f(0)$.

(ii) הוכיחו כי $N^+ \subseteq f(1/2)$

(**תזכורת:** הסימון N^+ הוא של קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים).

5. א. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ f : \{ n \in N \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid f^{(-1)}[\{A\}] \cap f^{(-1)}[\{B\}] = \emptyset \}$$

ב. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ f : \{ n \in N \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid |f^{(-1)}[\{A\}]| \in N_{even} \}$$

6. יהיו $T_1 = \langle V_1 , E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2 , E_2 \rangle$ עצים.
נגדיר גרף G באופן הבא:

$G = \langle V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2 \rangle$.

א. נתון כי $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. האם G בהכרח עץ? נמקו!

ב. נתון כי $E_1 \cap E_2 = \{ e \}$ האם G בהכרח עץ? נמקו!

בהצלחה!

03881118012
035980473

34 96

20

תשובה לשאלה מס' 1 מס' סטודנט

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף

(א) חיבור עוצמות מוגדר היטב: יהיו a,b עוצמות. צ"ל: לכל קב' A_1,A_2 כך ש $a=|A_1|=|A_2|$ ולכל קב' B_1,B_2 כך ש $b=|B_1|=|B_2|$ מתקיים $|A_2\cup B_2|=|A_1\cup B_1|$ כאשר $A_1\cap B_1=\emptyset$ וגם $A_2\cap B_2=\emptyset$. כך נראה כי חיבור עוצמות אינו תלוי בנציגים ולכן מוגדר היטב.

מכיוון ש a עוצמה קיימות קב' A_1,A_2 כך ש $a=|A_1|=|A_2|$, ומכיוון ש $A_1\sim A_2$ קיימת ביניהן פונ' שקילות. נסמן $f:A_1\to A_2$ שקילות. באותו אופן קיימות B_1,B_2 כך ש $|B_1|=|B_2|=b$ וקיימת ביניהן פונ' שקילות שנסמנה $g:B_1\to B_2$ שקילות. כמו כן, נניח כי $A_1\cap B_1=\emptyset$ וגם $A_2\cap B_2=\emptyset$. הנחה זו מותרת, כי אם $A_1\cap B_1=\emptyset$ ס"מנים אחרים, נגדיר $A_1'=A_1\times\{0\}$, $B_1'=B_1\times\{1\}$. $|A_1'|=|A_1|$ כי ניתן להגדיר פונ' שקילות $F:A_1\to A_1'$ כך $F=\lambda x\in A_1.\langle x,0\rangle$. באותו אופן $|B_1'|=|B_1|$ וברור כי הקב' שהגדרנו A_1' ו B_1' הן זרות. לכן, כאמור נניח כי $A_1\cap B_1=\emptyset$ ו $A_2\cap B_2=\emptyset$ (כי ניתן לעשות את אותו התהליך בדיוק עבור A_2,B_2)

שמוגדר חיבור עוצמות והעובדה ש $A_1\cap B_1=\emptyset$: $|A_1\cup B_1|=|A_1|+|B_1|$ ולכן $|A_1\cup B_1|=a+b$

כנ"ל לגבי $A_2\cup B_2$. נגדיר פונ' $H:A_1\cup B_1\to A_2\cup B_2$ ונראה כי היא פונ' שקילות:

$$H=\lambda x\in(A_1\cup B_1).\begin{cases}f(x) & x\in A_1\\ g(x) & x\in B_1\end{cases}$$

הפונ' מוגדרת היטב מכיוון שכל $x\in(A_1\cup B_1)$ שייך או ל A_1 או ל B_1 (כי הן זרות), ומכיוון אז מתאימה איבר השייך ל $A_2\cup B_2$ מהגדרת הפונ' f ו g. H חח"ע:

אם $H(x_1)=H(x_2)$ אז $x_1\in A_1\wedge x_2\in A_1$ או $x_1\in B_1\wedge x_2\in B_1$, מכיוון ש $A_2\cap B_2=\emptyset$, ולכן לא ייתכן כי $H(x_1)=H(x_2)$ אחרת. ומכיוון ש f ו g הן חח"ע, בהכרח מתקיים כי $x_1=x_2$.

H על: מכיוון שלכל $y\in A_2\cup B_2$ ניתן למצוא מקור: אם $y\in A_2$ אז $x=f^{-1}(y)$ מקיים $H(x)=y$ אם $y\in B_2$ אז $x=g^{-1}(y)$ מקיים $H(x)=y$. f,g הפיכות (משום שהן פונ' שקילות) ולכן ניתן לבצע את ההפכים הנ"ל.

מכיוון שקיימת פונ' שקילות בין $A_1\cup B_1$ ל $A_2\cup B_2$, הוכחנו $|A_1\cup B_1|=|A_2\cup B_2|$ כנדרש.

מ.ש.ל.

a,b עוצמות.

ב) (ii) אם $b\neq0$ וקיימת עוצמה c, $1<c$, כך ש $b=ac$ אזי $a<b$.

<u>הפרכה:</u>

עבור $b=\aleph_0$ ו $a=\aleph_0$ קיימת עוצמה c הגדולה מ 1 כך ש $b=ac$, למשל 2 (הוכחנו בכיתה כי לכל מס טבעי סופי n $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, ולכן הדבר מתקיים בפרט עבור 2). אבל לא מתקיים ש $a<b$, כי לא מתקיים ש $\aleph_0<\aleph_0$.

(iii) אם $b\neq0$ ו $a<b$ אזי קיימת עוצמה c כך ש $b=ac$.

<u>הפרכה:</u>

הדבר לא בהכרח מתקיים עבור עוצמות סופיות. למשל, אם $a=2$ (למשל עוצמת הקבוצה $\{1,2\}$) ו $b=3$ (למשל עוצמת הקבוצה $\{1,2,3\}$) אז מתקיים ש $b\neq0$ וש $a<b$ (כי $2<3$), אך אם קיימת עוצמה c כך ש $b=ac \Leftarrow 2\cdot c=3 \Leftarrow$ $c=1\frac{1}{2}$, וזה לא ייתכן, מכיוון שעוצמה סופית חייבת להיות מספר טבעי.

(i) אם $b\neq0$ וקיימת עוצמה c כך ש $b=ac$ אזי $a\leq b$.

<u>הוכחה:</u>

[redacted]. מכיוון ש $b\neq0$ לא ייתכן כי $c=0$, שכן אז $ac=0\neq b$. אז $c\neq0$, ומכיוון שהיא עוצמה $c\geq1$ (לא ייתכן ש $0<c<1$).

מכאן, שלפי חוקי עוצמות:

$$b=a\cdot c\geq a\cdot1=a$$

(כי $c\geq1$)

כלומר $b\geq a$ [redacted]

כנדרש.

קבוצה A נקראת תקינה אם $|A|\cdot|A|=|A|$

(א) צ"ל: אם A קבוצה אינסופית ותקינה, ו-B קבוצה $\Leftarrow$ $A\to B$ היא קבוצה תקינה.

כלומר, צ"ל כי $|A\to B|\cdot|A\to B|=|A\to B|$.

עוצמת הקבוצה: $|A\to B| = |B^A| = |B|^{|A|}$ לפי חוקי חזקות.

מחד, מתקיים כי: $|B|^{|A|} = |B|^{|A|}\cdot 1 \le |B|^{|A|}\cdot|B|^{|A|}$. שים לב

ש-$|B|^{|A|}\ge 1$ (אם $B=\emptyset$ מתקיים $|B|^{|A|}=0^{|A|}=1$, אם $|B|=1$ מתקיים $|B|^{|A|}=1^{|A|}=1$

ואחרת, אם $|B|>1$, מכיוון ש-A אינסופית מתקיים $|B|^{|A|}\ge 1^{|A|}=1$. בכל מקרה, $|B|^{|A|}\ge 1$).

מאידך, מתקיים: $|B|^{|A|} \underset{\text{מכיוון ש-A תקינה}}{=} |B|^{|A|\cdot|A|} \ge |B|^{|A|}\cdot|B|^{|A|} \underset{\text{מחוקי חזקות}}{=} |B|^{|A|+|A|} = |B|^{2|A|}$

מאחר מכיוון ש-A אינסופית ולכן בוודאי ש-$2<|A|$, ולכן מחוקי חזקות נקבל כי $|B|^{|A|\cdot|A|}\ge|B|^{2\cdot|A|}$.

הראינו כי $|B|^{|A|}\le|B|^{|A|}\cdot|B|^{|A|}$ וגם ש-$|B|^{|A|}\ge|B|^{|A|}\cdot|B|^{|A|}$.

לכן, לפי משפט קנטור ברנשטיין שרדר $|B|^{|A|}=|B|^{|A|}\cdot|B|^{|A|}$ ומכאן ש-$A\to B$ קבוצה תקינה כנדרש. מש"ל.

(ב) האם (א) נכון ללא התנאי ש-A אינסופית?

לא. עבור A שהיא סופית, ו-B סופית כך ש-$|B|>1$ לא מתקיים כי $A\to B$ תקינה:

דוגמא נגדית:

אם A סופית הרי ש-$|A|=1$ ומתקיים כי $|A|\cdot|A|=1\cdot1=1=|A|$ ולכן היא תקינה.

עבור B סופית כך ש-$|B|>1$ עוצמת הקבוצה $A\to B$ היא: $|B|^{|A|}=|B|^1=|B|$.

מכיוון ש-B סופית, ניתן לסמן $|B|=b$ ומתקיים ש-$1<b\in\mathbb{N}$. לכל מספר

טבעי b שגדול מ-1 ($|B|>1$!) מתקיים כי $b\cdot b>b$ ולכן $b\cdot b\neq b$.

לכן לא מתקיים כי $A\to B$ תקינה בתנאים אלו.

20

תשובה לשאלה מס׳ 3 מס׳ סטודנט____
במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס׳ ו

$$A_n = \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \le k \le 3n \}$$

(א) בכמה מהתמורות של איברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $3n$ (לאו דווקא צמוד לו)?

$A_n = \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$. כדי להגיע לתמורה "חוקית" לפי ההגדרה הנ"ל, נבחר 2 מקומות עבור n ו-$3n$. לכן יש $\binom{3n}{2}$ אפשרויות.

כל בחירה כזו של מקומות מגדירה באופן יחיד את המיקום של n ו-$3n$, מכיוון שמבין שני המקומות נבחר עבור n את השמאלי ועבור $3n$ את הימני. אך, כל שנותר, הוא לסדר את $3n-2$ האיברים הנותרים, ולכך יש $(3n-2)!$ אפשרויות. לכן, בסה"כ, מס׳ התמורות המבוקש הוא:

$$\binom{3n}{2}(3n-2)! = \frac{(3n)\cdot(3n-1)}{2}\cdot(3n-2)! = \frac{(3n)!}{2}$$

(ב) בכמה מהתמורות של איברי A_n האיבר n מופיע משמאלו של האיבר $2n$ ואילו האיבר $2n$ מופיע משמאלו של האיבר $3n$?

שוב, כמו ב-(א), נבחר 3 מקומות עבור $3n, 2n, n$. לכן יש $\binom{3n}{3}$ אפשרויות.

כל בחירה של 3 מקומות מגדירה באופן יחיד את המיקום של $3n, 2n, n$, כי את $3n$ נשים במקום הימני ביותר, את $2n$ באמצעי ואת n בשמאלי. לכן, מה שנותר הוא לסדר את $3n-3$ האיברים הנותרים, ולכך יש $(3n-3)!$ אפשרויות.

לכן, בסה"כ, מס׳ התמורות המבוקש הוא:

$$\binom{3n}{3}(3n-3)! = \frac{3n\cdot(3n-1)(3n-2)}{3!}\cdot(3n-3)! = \frac{(3n)!}{3!}$$

(ג) מעברים הכרחיים:

$$B_n = \{ f \in In(A_n, A_n) \mid \forall 1 \le k \le n-1,\ f^{(-1)}(3k) \le f^{(-1)}(3k+3) \}$$

צ"ל: B_n מעברה הישם, $|B_n| = ?$

B_n מעברה הישם: נראה כי כל B_n היא קבוצה, לפי עקרון הקומבינטוריקה המשלים, מכיוון שהיא מכילה את כל האיברים השייכים לקבוצה הפונקציות ($In(A_n, A_n)$) והמקיימים תכונה מסוימת.

שנית, [redacted] + שהיא פונק׳ חח"ע מקבוצה מסוימת לקבוצה השקולה לה (ובפרט מקבוצה לעצמה) הוא גם על. יש לב כי A_n (ובנוסף, קיימת פונק׳ חח"ע מ-A_n ל-A_n, כי $|A_n| \le |A_n|$) וכו׳

המשך מצ"ב בצד השני של הדף ←

המשך סעיף ג

לכן, ניתן אכן להתייחס ל-f^{-1} והיא פונ' המוגדרת היטב.
בנוסף, עבור $1\le k\le n-1$, $1\le 3k\le 3n-3$, $1\le 3k+3\le 3n$ ולכן $3k$ ו-$3k+3$ שייכים ל-A_n, ומכיוון ש-$f^{-1}:A_n\to A_n$ הם מקורות "תקינים" ל-f^{-1} ומוגדרת להם תמונה.

לכן, הקבוצה B_n מוגדרת היטב.
נחשב את עוצמתה:
ניתן להסתכל על $I_n(A_n,A_n)$ כקבוצת כל התמורות של איברי A_n.
אז B_n היא, למעשה, קב' כל התמורות, כך שבמקומות המתחלקים ב-3 $(3,6,9,\dots,3n)$ האיברים מסודרים "לפי הסדר", כלומר האיבר הנמצא במקום 3 הוא הקטן ביותר מבין כל האיברים שבמקומות המתחלקים ב-3, האיבר במקום ה-6 הוא הקטן ביותר פרט לזה שבמקום ה-3 וכו'.
אז, נבחר את n האיברים שימוקמו במקומות שהאינדקסים שלהם מתחלקים ב-3. לכן יש $\binom{3n}{n}$ אפשרויות. כל בחירה של n איברים מגדירה באופן יחיד את מיקומם, מכיוון שיש רק דרך אחת לסדרם לפי הסדר. לכן, כל שנשאר הוא לסדר את שאר $2n$ האיברים, ולכן יש $(2n)!$ אפשרויות.
לכן, בסה"כ:

$$|B_n| = \binom{3n}{n}\cdot(2n)! = \frac{(3n)!}{n!\cancel{(2n)!}}\cancel{(2n)!} = \frac{(3n)!}{n!}$$

תשובה לשאלה מסי 4 מסי סטודנט 035980473

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מסי מחברת 34

מגדירים: $M = \mathbb{N}^+ \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

$S = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in M.\ x = yz\}$

א) האם S יחס שקילות?

לא, נראה ש-S אינו טרנזיטיבי. למשל:

[illegible]

הזוג $\langle 1,3\rangle$ שייך ל-S, מכיוון ש $\langle 1,3\rangle \in \mathbb{R}^2$ ו- $1=\frac{1}{3}\cdot 3$, ו- $1/3 \in \{1/n \mid n\in\mathbb{N}^+\}$ ולכן גם $1/3 \in M$.

גם הזוג $\langle 3,1.5\rangle$ שייך ל-S, מכיוון ש $\langle 3,1.5\rangle \in \mathbb{R}^2$ ו- $3 = 1.5\cdot 2$ ו- $2 \in \mathbb{N}^+$ ולכן גם $2 \in M$.

אבל הזוג $\langle 1,1.5\rangle$ מקיים ש $1=\frac{2}{3}\cdot 1.5$, ו- $\frac{2}{3} \notin M$. קיבלנו סתירה לטרנזיטיביות, ולכן S אינו יחס שקילות.

ב) מגדירים: $f = \lambda x \in \mathbb{R}.\ \{y \in \mathbb{R} \mid \langle x,y\rangle \in S\}$

i) $f(0)=\{0\}$ הקבוצה שמכילה את המספר אפס, מכיוון שאם $0 = z\cdot y$, ו- $z \in M$ ולכן $z \neq 0$ (כל המספרים ב-M חיוביים), בהכרח $y=0$.

ii) צ"ל: $\mathbb{N}^+ \subseteq f(1/2)$

$f(1/2) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists z \in M.\ 1/2 = y\cdot z\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists z \in M.\ y = \frac{1/2}{z}\}$

מותר לחלק ב-z, כי $z \in M$ ולכן $z \neq 0$

[illegible]

אם נבחר $z = \frac{1}{2n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (מותר לבחור z כזה, כי מתקיים $n\in\mathbb{N} \Rightarrow 2n \in \mathbb{N}$ ולכן $\frac{1}{2n} \in \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ ולכן $\frac{1}{2n} \in M$) נקבל $f(1/2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2n}} = n$

ולכל $n \in \mathbb{N}^+$, ומכאן שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים z כך ש- $\langle \frac{1}{2}, n\rangle \in S$

ולכן $\mathbb{N}^+ \subseteq f(1/2)$.

(א) $A' = \{ f : \{ n \in \mathbb{N} \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid f^{(-1)}[\{A\}] \cap f^{(-1)}[\{B\}] = \emptyset \}$

צ"ל: $|A'| = ?$

A' היא קבוצת כל הפונקציות מהמס' הטבעיים בין 0 ל100 לקב' $\{A,B,C,D\}$ כך שקבוצת המקורות של A זרה לקבוצת המקורות של B. מהגדרת הפונ', לכל מקור מותאמת תמונה יחידה, ולכן אנו יודעים שמוגדרת פונ' f מתקיים לכל איבר בתמונה שקב' המקורות שלו זרה לקב' המקורות של כל איבר אחר בתמונה. לכן, קבוצה זו מכילה את כל הפונקציות מ $\{ n \in \mathbb{N} \mid 0 \le n \le 100 \}$ שעוצמתה 101, לקב' $\{A,B,C,D\}$ שעוצמתה 4.

מכאן, ש $|A'| = 4^{101}$

(ב) $B' = \{ f : \{ n \in \mathbb{N} \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{A,B,C,D\} \mid |f^{(-1)}[\{A\}]| \in \mathbb{N}_{even} \}$

צ"ל: $|B'| = ?$

B' היא קבוצת כל הפונקציות מהמס' הטבעיים בין 0 ל100 לקב' $\{A,B,C,D\}$ כך שקבוצת המקורות של A מכילה מס' זוגי של איברים. מציאת עוצמת B' שקולה למציאת כל האפשרויות לסדר 101 כדורים שונים ב-4 תאים כך שבתא הראשון יש מס' זוגי של כדורים.

הפונ' היוצרת המתאימה לבעיה זו היא:

$$\left(\frac{1}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot e^{3x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$$

עבור $n = 101$ יתקיים כי $\frac{|B'|}{101!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^{101}}{101!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{101}}{101!}$

לכן $|B'| = \frac{1}{2} \cdot 4^{101} + \frac{1}{2} \cdot 2^{101}$

12/20

תשובה לשאלה מסי 6 מסי סטודנ

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף

$T_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $T_2=\langle V_2,E_2\rangle$ עצים.

$G=\langle V_1\cup V_2 , E_1\cup E_2\rangle$

א) נתון: $V_1\cap V_2=\{v\}$. האם G בהכרח עץ?

כן. אם נסמן $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$ אזי מתקיים $|V_1\cup V_2|=n_1+n_2-1$
(כי יש קודקוד אחד משותף לשני העצים). בנוסף, מכיוון ש T_1 עץ, מתקיים
כי $|E_1|=n_1-1$ (ממשפט בעץ על n קודקודים יש בדיוק $n-1$ קשתות)
ובאותו אופן $|E_2|=n_2-1$. בנוסף, מכיוון שיש רק קודקוד אחד
משותף ל T_1 ו T_2, לא ייתכן כי קיימת להם קשת משותפת,
ולכן $E_1\cap E_2=\emptyset$. מכאן, ש $|E_1\cup E_2|=|E_1|+|E_2|=n_1+n_2-2$. כלומר: $|E_1\cup E_2|=|V_1\cup V_2|-1$.
נוכיח כעת כי G קשיר, ואז, מכיוון שגרף הוא עץ אמ"ם הוא קשיר עם
מספר בדיוק $|V|-1$ קשתות, נסיים את ההוכחה.
מכיוון ש T_1 הוא עץ הוא בהכרח קשיר, כלומר קיים מסלול מכל קודקוד
לכל קודקוד ב V_1 . באותו אופן, קיים מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד ב V_2.
מכיוון שקיים קודקוד משותף לשני העצים - v , מכל קודקוד $x_1\in V_1$ קיים מסלול
ל v (כי $v\in V_1$) ומ v קיים מסלול לכל קודקוד $x_2\in V_2$ (כי $v\in V_2$). מכאן שבין
כל שני קודקודים $x_1\in V_1$ ו $x_2\in V_2$ קיים מסלול (ובין קודקודים ששניהם שייכים
ל V_1 או ששניהם שייכים ל V_2 קיים מסלול מקשירות העצים T_1 ו T_2).
מכאן, ש G קשיר ולכן עץ. מש"ל

10/10

ב) נתון $E_1\cap E_2=\{e\}$. האם G בהכרח עץ?
לא. נראה /משפט מכיוון ש $V_1\cap V_2=\emptyset$. אזי, ב G יש n_1+n_2
קודקודים (אם נסמן $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$). ב T_1 יש n_1-1 קשתות, כי הוא
עץ, וב T_2 יש n_2-1 קשתות, כי הוא עץ. מכיוון שקיימת קשת אחת
בדיוק המשותפת בין העצים, $|E_1\cup E_2|=n_1+n_2-3$. מכיוון שלכן, לא יכול להתקיים
ש G עץ (כי כפי שהסברתי בסעיף א', ממשפט שקיים בעץ $|V|-1$ קשתות
ובמקרה זה ל G $|V|-3$ קשתות).

לא/ לא/

2/10