0368-1118

מתמטיקה בדידה
סמסטר א' תשס"ד

א. אברון, י. הירשפלד, י. רודיטי
מועד א' 20.02.04

משך הבחינה שלוש שעות. **אסור** השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון, (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

לגליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתיבת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.

כמקובל, האותיות N, R ו-Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.
בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות. ערך מכסימלי לתשובה **נכונה** לשאלה הוא 20% .
למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי.
ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתיים והתוצאה תתוסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.

1. א. הוכיחו כי חיבור עוצמות מוגדר היטב.

ב. תהיינה a , b עוצמות. הוכיחו כי : $a \le b$ **אם"ם** קיימת עוצמה c כך ש-: $a + c = b$.

2. קבוצה A תקרא **תקינה** אם $|A| = |A| + |A|$.

א. הוכיחו כי אם A קבוצה אינסופית ותקינה , וכן B קבוצה שאינה סינגלטון , אזי הקבוצה $A \to B$ היא קבוצה תקינה.

ב. האם (א) נכון **ללא** התנאי ש- A אינסופית ?

ג. הוכיחו כי יש אינסוף קבוצות תקינות שאף שתיים מהן אינן שוות עוצמה.

3. רשמו נוסחת נסיגה והציגו פתרון מפורש לבעיה הבאה :

תהיינה $B = \{ \emptyset , N , R \}$, $A(n) = \{ 1,2,...,n\}$. כמה פונקציות מ- $A(n)$ ל- B יש כך ש-:

$$\forall k \in A(n) .f(k) \neq \emptyset \to f(k+1) \neq f(k).$$

(**רמז:** למעשה תרגיל מתרגילי הבית !!!)

4. א. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A , B מתקיים : $P(A \setminus B) \setminus (P(A) \setminus P(B)) = \{ \emptyset \}$.

ב. הראו כי הביטוי הבא מוגדר היטב וחשבו את ערכו :

$$(\lambda A \in P(N), B \in P(N) . \iota x .x \in (P (A \setminus B) \setminus (P(A) \setminus P(B))))(N , N_{even})$$

XX-48

5. חשבו את עוצמת הקבוצה הבאה:

$$\{ f : \{ n \in N \mid 0 \le n \le 100 \} \to \{0,1,2,3,4\} \mid |f^{(-1)}[\{1\}]| \ge 1 \wedge |f^{(-1)}[\{2\}]| \ge 1 \wedge |f^{(-1)}[\{3\}]| \ge 1 \}$$

6. א. יהיו $T_1 = \langle V_1 , E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2 , E_2 \rangle$ עצים כך ש-: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. יהיו: $a \in V_1$, $b \in V_2$. נגדיר גרף G באופן הבא:

$$G = \langle V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2 \cup \{\{a,b\}\} \rangle.$$

הוכיחו כי G עץ.

ב. יהי $G = \langle V, E \rangle$ כך ש-: $V = P_2(\{1,2,...,n\})$, $E = \{ \{A,B\} \in P_2(V) \mid A \cap B = \emptyset \}$.

חשבו את $|V|$ וכן את דרגת כל קודקוד (צומת) ב-V.

בהצלחה!

פונקציות יוצרות: התכונות היסודיות

נניח: $\lambda x.F(x)$ יוצרת את $\lambda n.a_n$

$\lambda x.G(x)$ יוצרת את $\lambda n.b_n$

אז:

(1)	$\lambda x.\alpha F(x)+\beta G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\alpha a_n+\beta b_n$
(2)	$\lambda x.x^m\cdot F(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n<m\\ a_{n-m} & n\ge m\end{cases}$
(3)	$\lambda x.\frac{F(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{m-1}x^{m-1}}{x^m}$	יוצרת את	$\lambda n.a_{n+m}$
(4)	$\lambda x.F(cx)$	יוצרת את	$\lambda n.c^n a_n$
(5)	$\lambda x.F(x^m)$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}a_{\frac{n}{m}} & n/m\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$
(6)	$\lambda x.F(x)\cdot G(x)$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$
(7)	$\lambda x.\frac{F(x)}{1-x}$	יוצרת את	$\lambda n.\sum_{k=0}^{n}a_k$
(8)	$\lambda x.F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.(n+1)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x.x\cdot F'(x)$	יוצרת את	$\lambda n.na_n$
(10)	$\lambda x.\int_0^x F(t)dt$	יוצרת את	$\lambda n.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0\end{cases}$

טבלה מס' ד.3 כוללת את עשר הזהויות הבינומיאליות החשובות ביותר. בטבלה זו a, b, x, y, α הם מספרים ממשיים כלשהם; n, m, k – מספרים טבעיים. בצד ימין רשומים תנאים לנכונותן של הזהויות משמאל.

טבלה ד.3:
זהויות בינומיאליות חשובות

	תנאים	
(1)	$k \le n$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2)	$k \ge 1$	$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$
(3)	$\alpha \in N \vee \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert < 1$	$(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k} b^k$
(4)		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = 2^n$
(5)	$n \ge 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
(6)		$\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$
(7)	$k \le n$	$\binom{x}{n}\binom{n}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{n-k}$
(8)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$
(9)	$m \le n$	$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
(10)		$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$

[redacted] 41

9/2

תשובה לשאלה מסי 1 מסי סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מסי מחברת 44

(1) (10) נראה כי לכל שתי קבוצות $|A'|=a$

$|B'|=b$ $|A'|+|B'|=a+b$

(כלומר הגדרת חיבור עוצמות אינה תלויה בנציגים)

מהגדרת חיבור עוצמות:

$|A\cup B| = |A|+|B| = a+b$ $A\cap B=\emptyset$

$|A|=a$, $|B|=b$

מכיוון ש- $|A'|=|A|=a$ קיימת פונקציית שקילות f

מ- A' ל- A $f: A'\to A$

מכיוון ש- $|B'|=|B|=b$ קיימת פונקציית שקילות g

מ- B' ל- B $g: B'\to B$

כלומר:

$|A'| = |f(A')| = a$

$|B'| = |g(B')| = b$

וכן: ~~$f(A')\cap g(B')=\emptyset$~~

ולכן: $|A'|+|B'| = |f(A')\cup g(B')| = |f(A')|+|g(B')| = a+b$

מ.ש.ל.

[illegible]

סתם הנחת H $a_1=a_2$

$b_1=b_2$

$\Downarrow$

$a_1+b_1=a_2+b_2$

2/10

שזה מה שצריך

צריך לבנות באופן מפורש פונק' חח"ע ועל

בין $A'\cup B'$ ל $A\cup B$.

תשובה לשאלה מס' **1** מס' סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס' מחברת 44

(1) ב) תהיינה a,b עוצמות הוכיחו כי $a \le b$ אמ"ם

קיימת עוצמה c כך ש: $a+c=b$

כיוון א': קיימת עוצמה c כך ש $a+c=b$

נראה $a \le b$.

תהיינה קב' זרות A, C $|C|=c$, $|A|=a$

אזי $|A \cup C| = a+c$

תהי קב' B נקבל: $|B|=b$.

נראה ~~...~~ שנקבל חח"ע מ-A ל-B ואז ינבע ש $|A| \le |B|$

כלומר $a \le b$.

מכיוון ש: $a+c=b$ אזי קיימת פונקציית שקילות

מ-$A \cup C$ ל-B. נסמנה כ-f: $f: A \cup C \to B$ ~~שקילות~~

נגדיר פונקציה f מצומצמת על A:

$$f|_A : A \to B$$

פונקציה זו הינה פונקציה חח"ע מכיוון ש-f היא חח"ע.

(אך אינה על B), נראה ש-$f|_A$ חח"ע:

$\forall a,b \in A$ $\quad f|_A(a) = f|_A(b)$

$$\Downarrow$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\Downarrow$$

$$a=b$$

מכיוון שקיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B נובע $a \le b$.

כיוון ב': $a \le b$ נראה כי קיימת עוצמה C כך ש: $a+c=b$.

יהיו A,B קב' כך ש: $|A|=a, |B|=b$

אזי קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B:

$f: A \to B$ חח"ע

תהי C קב' כך ש $A \cap C = \emptyset$ וגם: $|C| = |B \setminus f(A)| = c$

C כזו. צריך להוכיח

מכיוון ש: $|C| = |B \setminus f(A)|$ קיימת פונקציה שקילות h ל- $B \setminus f(A)$: $h: C \to B \setminus f(A)$ שקילות

בין A,B

נבנה פונקציה חדשה: $g: A \dot\cup C \to B$

$$\forall x \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ h(x) & x \in C \end{cases}$$

צריך g מוגדרת היטב

~~פונקציה היא חח"ע ועל~~ B!

נראה כי g חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in A \dot\cup C$ כך ש: $g(x_1) = g(x_2)$

אם $x_1, x_2 \in A$ נקבל: $f(x_1) = f(x_2)$

מכיוון ש f חח"ע נקבל $x_1 = x_2$.

אם $x_1, x_2 \in C$ נקבל: $h(x_1) = h(x_2)$

מכיוון ש h פונקציה חח"ע אז נקבל $x_1 = x_2$

אם $x_1 \in A, x_2 \in C$ נקבל: $f(x_1) = h(x_2)$

אבל: $h(x_2) \in B \setminus f(A)$ ו- $f(x_1) \in f(A)$, ולכן לא ייתכן כי $x_1 \in A$, $x_2 \in C$

קב' זרות

אם $g(x_1) = g(x_2)$

ולכן g חח"ע.

נראה כי g על B: יהי $y_0 \in B$ נבחר:

$$x_0 = \begin{cases} \cancel{f^{-1}[y_0] \quad y_0 \in f(A)} \\ h^{-1}[y_0] \quad y_0 \in B \setminus f(A) \end{cases}$$

ואכן מתקיים: $g(x_0) = y_0$

מכיוון ש g פונקציה שקילות מתקיים: $|A \dot\cup C| = |B|$

ולכן: קיימת עוצמה c כך ש: $a + c = b$

מ.ש.ל.

7/10

תשובה לשאלה מסי 2 מסי סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מסי מחברת 4A

20/20

(2)(ב) קבוצה A נקראת "תקינה" $\iff |A|+|A|=|A|$

A אינסופית ותקינה $\leftarrow |A|+|A|=|A|$

$|B|\neq 1$

צ"ל: $A\to B$ תקינה, כלומר:

$$|B^A|+|B^A|=|B^A|$$

הוכחה:

$|B|\neq 1$, נניח $|B|=0$ אזי $B=\emptyset$. נשתמש בחשבון עוצמות:

$$|B^A|=|B|^{|A|}=0^{|A|}=0$$

ולכן מתקיים ש: $0+0=0$ ולכן $|B^A|$ תקינה

במקרה ש: $|B|\neq 0$

נניח $|B|>1$: $|B|=b>1$, אזי:

$$|B^A|=|B|^{|A|}=b^{|A|}$$

נראה שמתקיים $b^{|A|}+b^{|A|}=b^{|A|}$

$$b^{|A|}+b^{|A|}=2\cdot b^{|A|}$$

(מכיוון ש: $b>1$ ו-A אינסופית $2\leq b^{|A|}$) $\underbrace{b^{|A|}\leq 2\cdot b^{|A|}}\leq b^{|A|}\cdot b^{|A|}=b^{|A|+|A|}=b^{|A|}$

* מכיוון ש-A תקינה אזי $b^{|A|}=b^{|A|+|A|}$

ולפי קנטור ברנשטיין נקבל:

$$b^{|A|}+b^{|A|}=b^{|A|}$$

ולכן הקבוצה B^A תקינה.

$(A\to B)$

(2)(ב)

~~[illegible]~~

נראה דוגמא נגדית: הקבוצה $\emptyset$ היא תקינה כי: $|\emptyset|=0$ ו-$0+0=0$

נראה כי הקבוצה: $\emptyset\to\{1,2\}$ אינה תקינה:

$$\left|\{1,2\}^{\emptyset}\right|=2^0=1 \qquad 1+1=2\neq 1$$

2 (ה)

נראה כי קיימות אינסוף קבוצות תקינות שאף 2 מהן אינן שוות עוצמה:

תהי A קב' אינסופית ותקינה שעוצמתה a.

אזי: $a+a=a$

נגדיר הקבוצה $P(A)$. לפי משפט קנטור:

$$2^a = |P(A)| > |A| = a$$

כלומר: $2^a > a$

נראה כי גם עבור העוצמה 2^a מתקיים: $2^a = 2^a + 2^a$

ואז $P(A)$ תהיה תקינה:

נבונן בקבוצה: $A \to \{0,1\}$ קב' כל הפונקציות מ-A ל-$\{0,1\}$

$\{0,1\}$ אינה סינגלטון, A אינסופית ותקינה ולכן, לפי סעיף ד' מתקיים:

$$|\{0,1\}^A| + |\{0,1\}^A| = |\{0,1\}^A|$$

אך

$$|\{0,1\}^A| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^a$$

ולכן $2^a + 2^a = 2^a \Leftarrow |P(A)| + |P(A)| = |P(A)|$

והקבוצה $P(A)$ שעוצמתה גדולה ממש מעוצמת A היא תקינה.

באותו אופן - הקבוצה $P(P(A))$ תקינה וגדולה ממש מ-$P(A)$.

(נסמן $P(A)=B$, ולפי מה שהוכחנו - B הינה קב' תקינה ואינסופית ולכן כך גם $P(B)$ ובנוסף לפי קנטור $|P(B)|>|B|$).

~~[illegible]~~ הקשר $|P(A)|>|A|$ מתקיים לכל 2 עוצמות

ולכן נקבל אינסוף קבוצות תקינות שאף שתיים מהן אינן שוות עוצמה.

20

תשובה לשאלה מסי 3 מסי סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מסי מחברת 41

$B=\{\phi, \mathbb{N}, \mathbb{R}\}$ $A(n)=\{1,2,\dots,n\}$

$\forall k \in A(n),\ f(k\neq\phi) \rightarrow f(k+1)\neq f(k)$

נסמן ב-a_n את מס' הפונקציות מ-$A(n)$ ל-B המקיימות את תנאי השאלה, ונקבל נוסחת נסיגה:

$$a_n = \begin{cases} \phi\,\boxed{n-1} & a_{n-1} \\ \mathbb{N}\,\boxed{n-1} - \mathbb{N}\mathbb{N}\,\boxed{n-2} & a_{n-1}-a_{n-2} \\ \cancel{\mathbb{R}\,\boxed{n-1} - \mathbb{R}\mathbb{R}\,\boxed{n-2}} & \cancel{a_{n-1}-a_{n-2}} \end{cases}$$

הסבר:

כאשר $f(1)=\phi$ יש a_{n-1} אפשרויות לקביעת $f(2)$ עד $f(n)$ – כמס' הפונקציות החוקיות מ-$A(n-1)$ ל-B.

כאשר $f(1)=\mathbb{N}$ חייב להתקיים ש-$f(2)\neq\mathbb{N}$, ולכן ישנן a_{n-1} אפשרויות לבחירת $f(2)$ – $f(n)$, פחות האפשרויות שאינן חוקיות - אלו שבהן יש רק: $f(1)=f(2)=\mathbb{N}$ ובכאלו יש: a_{n-2}, כך גם לגבי $f(1)=\mathbb{R}$

לכן נוסחת הנסיגה תהיה: $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$

תנאי ההתחלה: a_0 יהיה כמס' הפונקציות החוקיות מ-$\phi=A(0)$ ל-B, ולא יתכן $f(k)=f(k+1)$ בגלל כי ב-A יש 0 איברים ולכן:

$a_0=|B|^{|A(0)|}=3^0=1$

a_1 יהיה כמס' הפונקציות החוקיות מ-$A(1)=\{1\}$ ל-B

לא יתכן $f(k)=f(k+1)$ ולכן $a_1=|B|^{|A(1)|}=3^1=3$

$$\frac{2}{2}\begin{cases} a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2} \\ a_1=3 \\ a_0=1 \end{cases}$$

נפרש את נוסחת הנסיגה:

הפולינום האופייני:

$$t^2-3t+2=0$$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$$

$$t_1=2 \qquad a_n=\alpha\cdot 1^n+\beta\cdot 2^n$$

$$t_2=1$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} a_0=1=\alpha+\beta & \rightarrow \quad \alpha=1-\beta \\ a_1=3=\alpha+\beta\cdot 2 \end{cases}$$

$$\cancel{3=1-\beta+8\beta}$$

$$\cancel{7\beta=2}$$

$$\cancel{\beta=3\tfrac{1}{2}} \qquad \cancel{\alpha=1-3\tfrac{1}{2}=-2\tfrac{1}{2}}$$

$$\cancel{\boxed{a_n=-2\tfrac{1}{2}+3\tfrac{1}{2}\cdot 2^n}}$$

$$3=1-\beta+2\beta$$

$$\boxed{\beta=2}$$

$$\boxed{\alpha=-1}$$

$$\boxed{a_n=-1+2^{n+1}}$$

1

(17)

תשובה לשאלה מס' 4 מס' סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס' מחברת 41

4. (10) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B)) = \{\emptyset\}$

יהי $X \in P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B))$ אזי:

$$X \in P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B)) \leftrightarrow X \in P(A\setminus B) \wedge X \notin (P(A)\setminus P(B)) \leftrightarrow$$

$$X \in P(A\setminus B) \wedge (X \notin P(A) \vee X \in P(B)) \leftrightarrow$$

$$[X \in P(A\setminus B) \wedge X \notin P(A)] \vee [X \in P(A\setminus B) \wedge X \in P(B)] \leftrightarrow$$

$$[X \subseteq A\setminus B \wedge X \not\subseteq A] \vee [X \subseteq A\setminus B \wedge X \subseteq B] \leftrightarrow$$

$$[(\forall x \in X.\ x \in A \wedge x \notin B) \wedge (\exists x \in X.\ x \notin A)] \vee$$

$$[(\forall x \in X.\ x \in A \wedge x \notin B) \wedge (\forall x \in X.\ x \in B)] \leftrightarrow$$

$$X = \emptyset \leftrightarrow X \in \{\emptyset\}$$

הסבר

(*) לא קיימים איברים ב-X (ולכן $X = \emptyset$) מכיוון שקיבלנו באגף הראשון של ה"או" גורם שקריות! $\forall x \in X.\ x \notin B \wedge x \in A \wedge \exists x \in X.\ x \notin A$ – לא ייתכן כי לכל x השייך ל-X והוא שייך ל-A וגם יתקיים x ב-X שלא שייך ל-A.

באגף השני של ה"או": קיבלנו גם כן גורם שקרי – כיוון שלא ייתכן שלכל $x \in X$ הוא שייך ל-B וגם לא שייך ל-B. – ולכן לא קיים $x \in X$ ו- $X = \emptyset$.

הראנו כי לכל X: $X \in \{\emptyset\} \leftrightarrow X \in P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B))$

ולכן:

$$P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B)) \subseteq \{\emptyset\}$$

$$P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B)) \supseteq \{\emptyset\}$$

כלומר, לפי עקרון האקסטנציונליות – מתקיים השוויון.

9

4ג) $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{even})\ \iota X.\ X \in (P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B)))\ \lambda A\in P(\mathbb{N}), B\in P(\mathbb{N})$

הביטוי ~~[illegible]~~ הינו מטיפוס שהזוג: $(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{even})$ הוא איבר בתחום

$P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$, כזוג של קבוצות חלקיות ל-$\mathbb{N}$

בנוסף, אכן קיים X יחיד השייך ל- $P(\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{even})\setminus(P(\mathbb{N})\setminus P(\mathbb{N}_{even}))$

מכיוון שבסעיף א' הוכחנו את הטענה כי לכל A,B מתקיים - $P(A\setminus B)\setminus(P(A)\setminus P(B))=\{\emptyset\}$

ובפרט כשמתקיים עבור $\mathbb{N}$ ו-$\mathbb{N}_{even}$, ולכן: $X=\emptyset$ והוא ~~[illegible]~~

האיבר היחיד ב-$\{\emptyset\}$ ולכן יש הצדקה לסימון האיוטה: ιX.

ערך הביטוי יהיה פשוט: $\emptyset$.

[illegible]

[illegible] $\langle A,B\rangle$ [illegible]

תשובה לשאלה מסי 5 מסי סטודנט [redacted]
במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מסי מחברת 41

(5)

$f:\{n\in\mathbb{N} \mid 0\le n\le 100\}\to\{0,1,2,3,4\} \mid$
$\left|f^{-1}[1]\right|\ge 1 \wedge \left|f^{-1}[2]\right|\ge 1 \wedge \left|f^{-1}[3]\right|\ge 1\}$

נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה:

נסמן:

U - קב' כל הפונקציות האפשריות מ-C ל-D

$C=\{n\in\mathbb{N} \mid 0\le n\le 100\}$

$D=\{0,1,2,3,4\}$

$$|U| = 5^{101}$$

$\forall_{1\le i\le 3}\ A_i$ - קב' להפונקציות מ-C ל-D כך שהאיבר i ב-D אינו מתקבל (שאינו בתמונה)

$$|A_i| = 4^{101} \qquad 1\le i\le 3$$

$$|A_i\cap A_j| = 3^{101} \qquad 1\le i\ne j\le 3$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = 2^{101}$$

פונק' החוקיות $= \left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1\cap A_2| +$
$+ |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_3| - |A_1\cap A_2\cap A_3| =$

$$= 5^{101} - 3\cdot 4^{101} + 3\cdot 3^{101} - 2^{101}$$

20

20

תשובה לשאלה מס' 6 מס' סטודנט [redacted]

במידת הצורך השתמש גם בצדו השני של הדף מס' מחברת 41

$T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$

$T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$a \in V_1$

$G = \langle V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2 \cup \{\{a,b\}\} \rangle$ $b \in V_2$

נראה כי G קשיר: יהיו $u,v \in V_1 \cup V_2$ (בה"כ: $u \in V_1$, $v \in V_2$)

נראה כי ניתן להגיע מ-u ל-v ע"י טיול ב-G.

$u \in V_1 \cup V_2 \Leftarrow u \in V_1 \lor u \in V_2$ נניח בה"כ כי $u \in V_1$

מכיוון ש-T_1 עץ, ובפרט קשיר - ניתן להגיע מ-$u \in V_1$ ל-$a \in V_1$ ע"י טיול ב-T_1, מכיוון ש ב-G קיימים כל הקודקודים והקשתות של T_1 ניתן להגיע מ-u ל-a גם ב-G.

ב-G נוספה קשת $\{a,b\}$ ולכן ניתן מ-a להגיע ל-b

מכיוון ש-$b \in T_2$ ו-T_2 קשיר ניתן להגיע מ-b ל-v ע"י טיול ($v \in T_2$) ב-T_2. מכיוון ש ב-G קיימים כל הקשתות והקודקודים של T_2 הרי שגם ניתן להגיע מ-b ל-v ע"י טיול ב-G.

* הנחנו $u \in V_1$ $v \in V_2$ אבל אם $u,v \in V_1$ (או V_2 בה"כ) אז מכיוון ש-T_1 קשיר וב-G מופיעות כל הקשתות שב-T_1 ניתן באופן ישיר מ-u ל-v ע"י טיול ב-G.

כלומר, לכל $u,v \in V_1 \cup V_2$ ניתן להגיע מ-u ל-v ע"י טיול ב-G ולכן G קשיר.

נראה כי אין ב-G מעגלים: נסמן ב-A את קבוצת כל הצמתים ~~מעגשה~~: $A = V_1 - \{a\}$, נסמן $B = V_2 - \{b\}$. נניח בשלילה שקיים ב-G מעגל

אם קיים מעגל ב-G אזי הקבוצות A ו-B אינן זרות.

אך בהכרח כיוון ש-V_1 ו-V_2 הן קבוצות זרות: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ולכן בהכרח גם $A \cap B = \emptyset$ והגענו לסתירה.

- מכיוון ש G קשיר וחסר מעגלים — G הוא עץ.

10

(6) (ב) $G=\langle V,E\rangle$

$V=P_2(\{1,\dots,n\})$

$E=\{\{A,B\}\in P_2(V) \mid A\cap B=\emptyset\}$

$$|V|=|P_2(\{1,\dots,n\})|=\binom{n}{2}$$

מס' האפשרויות לבחור תת קבוצות בגודל 2 מקבוצה בגודל n.

~~דרגת~~ דרגת כל קודקוד ב-V תהיה כמס' האפשרויות לבחור תתי קבוצות בגודל 2 מקבוצה בגודל n-2:

$$\forall v\in V \quad d(v)=\binom{n-2}{2}$$

(- מכיוון שלכל קודקוד תהיה קשת לקודקוד אחר אם ורק אם אין לקבוצה שהקודקוד a מייצג (תת קבוצה בגודל 2 של $\{1,\dots,n\}$) ולקבוצה ש-b מייצג (כמובן תת קבוצה בגודל 2 של $\{1,\dots,n\}$), איברים משותפים;

$V=P_2(\{1,\dots,k,\dots,m,\dots,n\})$ $\quad a\in V$

$a=\{k,m\}$

לכל b, כך ש: $\{a,b\}\in E$ יתקיים: $\quad b=\{c,d\}$

$$\forall b.\quad c\neq k\wedge c\neq m\wedge d\neq k\wedge d\neq m$$

ולכן, למעשה:

$$b\in P_2(\{1,\dots,n\}-\{k,m\})$$

ולכן האפשרויות לבחירת b הן $\binom{n-2}{2}$

ולכן לכל $a\in V$ $\quad d(a)=\binom{n-2}{2}$