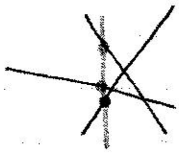
17.3.08

מתמטיקה בדידה - שיגר

רקורסיה (קומבינטורית)

$a(n)$ - מס' התחומים הנוצרים ע"י n ישרים (במצב כללי) במישור.



$$a(n)=a(n-1)+n \quad \text{לכל } n>0$$

$$a(0)=1$$

ננסה להגיע לביטוי סגור (ישיר, לא רקורסיבי) עבור $a(n)$:

$$a(n)=a(n-1)+n=a(n-2)+(n-1)+n=\cdots=$$

$$a(1)+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=$$

$$a(0)+\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}=1+\frac{(n+1)n}{2}$$

* שיטה נוספת להגיע לביטוי סגור עבור $a(n)$ (בעזרת פונק' יוצרת):

נסמן את הפונק' היוצרת של הסדרה $a=\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)$ ב-A, כלומר:

$$A=\lambda x.A(x)=\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n$$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n=a(0)+\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n=1+x\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^{n-1}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}[a(n-1)+n]x^{n-1}=$$

$$1+x\left[\sum_{n=1}^{\infty}a(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)+1]x^{n-1}\right]=1+x\Big[\underbrace{\sum_{n-1=0}^{\infty}a(n-1)x^{n-1}}_{A(x)}+\underbrace{\sum_{n-1=0}^{\infty}S(2,n-1)x^{n-1}}_{\frac{1}{(1-x)^2}}\Big]$$

קיבלנו $A(x)=1+x\left[A(x)+\frac{1}{(1-x)^2}\right]$ זו משוואה עבור $A(x)$.

נחלץ את $A(x)$:

$$A(x)=1+xA(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$(1-x)A(x)=1+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^3}$$

ולכן:

$$\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n=\lambda x.A(x)=\lambda x\,\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^3}=$$

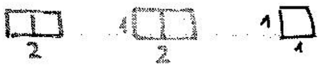
$$\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}S(3,n)x^n=\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}S(3,n)x^{n+1}}_{k=n+1}=$$

$$\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{k=1}^{\infty}S(3,k-1)x^k=\lambda x\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}S(3,n-1)x^n$$

לסיכום

$$a(n)=\begin{cases}1+S(3,n-1) & n>0\\ 1 & n=0\end{cases}$$

תרגיל: $b(n)$ מספר הדרכים לרצף שביל באורך n ורוחב 1 באמצעות (מלאי בלתי מוגבל) אריחים משלושה סוגים:



צריך למצוא ביטוי סגור ל-$b(n)$

פתרון: $b(n)=b(n-1)+2b(n-2)$ ל $n\geq 2$

אפשרויות אם התחלנו לרצף עם אריח שחור

אפשרויות אם התחלנו לרצף עם אריח כתום או כחול.

$$b(1)=1$$

קיימת אפשרות אחת - הריצוף הריק $\rightarrow b(0)=1 \leftarrow$ מס' האפשרויות לרצף שביל ריק.

נסמן כמקודם ב-B את הפונק' היוצרת של הסדרה b. כלומר:

$$B=\lambda x.B(x)=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n$$

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n=b(0)+b(1)x+\sum_{n=2}^{\infty}b(n)x^n=$$
$$1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(b(n-1)+2b(n-2))x^n=$$

$$1+x+\sum_{n=2}^{\infty}b(n-1)x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}b(n-2)x^n=1+x+x\underbrace{\left(\sum_{n-1=1}^{\infty}b(n-1)x^{n-1}\right)}_{B(x)-b(0)}+2x^2\underbrace{\sum_{n-2=0}^{\infty}b(n-2)x^{n-2}}_{B(x)}$$

קבלנו:
$$B(x)=1+x+x(B(x)-1)+2x^2B(x)$$

נחלץ את $B(x)$:
$$B(x)(1-x-2x^2)=1$$
$$B(x)=\frac{1}{1-x-2x^2}=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}=\frac{\frac{2}{3}}{1-2x}+\frac{\frac{1}{3}}{1+x}$$

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n=\lambda x\, B(x)=\lambda x\ \frac{\frac{2}{3}}{1-2x}+\frac{\frac{1}{3}}{1+x}=\lambda x.\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

לסיכום: $b(n)=\frac{2}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{3}(-1)^n$ לכל n.

באופן כללי: אם הסדרה $d=\lambda n.d(n)$ מקיימת יחס רקורסיה $d(n)=\alpha d(n-1)+\beta d(n-2)$ (α,β מס' ממשיים כלשהם) ואם λ,μ הם השורשים (השונים!) של המשוואה הריבועית $y^2=\alpha y+\beta$ אזי: $d(n)=\underbrace{\frac{d(1)-\mu d(0)}{\lambda-\mu}}_{a}\cdot\lambda^n+\underbrace{\frac{d(1)-\lambda d(0)}{\mu-\lambda}}_{b}\cdot\mu^n$

הערה: את המקדמים a,b מוצאים למעשה ע"י פתרון מע' המשוואות:

$$a+b=d(0)$$
$$\lambda a+\mu b=d(1)$$

יחס רקורסיה כזה נקרא: יחס רקורסיה לינארי הומוגני ממעלה 2 עם מקדמים קבועים.

הערה: אם $\lambda=\mu$ הנוסחה שונה: $d(n)=d(0)\cdot\lambda^n+(d(1)-\lambda d(0))\lambda^{n-1}\cdot n$

17.3.08 (3)

מתמטיקה בדידה - שיעור

דוגמאות: לשימוש בשיטה המקוצרת:

(1) $b(n)=b(n-1)+2b(n-2)$ $\quad (\alpha=1,\ \beta=2)$

צריך לפתור: $y^2=y+2$, הפתרונות $\lambda=2,\ \mu=-1$

נמצא את המקדמים a,b:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{מקדם}}{a+b}=\underset{\text{b סדרה}}{b(0)}=1 \\ 2a-b=b(1)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{3}$$

ולכן, $b(n)=\frac{2}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{3}(-1)^n$ לכל n (כמו שקיבלנו קודם)

(2) בע"ת הארנבות שהוצגה לליאונרדו פיזנו (סדרת פיבונאצ'י)

נסמן את מספר זוגות הארנבות שיהיו לאחר n שנים ב-$f(n)$.

$f(0)=1$ בהתחלה

$f(1)=1$ לאחר שנה

$f(2)=2$

$f(3)=3$

$f(4)=5$

$$\underset{\text{לאחר } n \text{ שנים}}{f(n)}=f(n-1)+f(n-2)$$

אלו שהיו כבר לפני = אלו שכבר בוגרים = אלו שנולדו לפני שנתיים. מינוס אלו שהיו כבר לפני שנה

נמצא ביטוי סגור עבור $f(n)$ לפי השיטה המקוצרת:

$\alpha=1 \quad \beta=1$

צריך לפתור: $y^2=y+1$ $\quad \left(\frac{y}{1}=\frac{y-1}{y}\right)$

השורשים: $\mu=\frac{1-\sqrt5}{2}$ $\quad \lambda=\frac{1+\sqrt5}{2}$ ← חתך הזהב.

נמצא את a,b:

$$a+b=f(0)=1$$

$$\frac{1+\sqrt5}{2}a+\frac{1-\sqrt5}{2}b=f(1)=1$$

$$\frac12 a+\frac{\sqrt5}{2}a+\frac12 b-\frac{\sqrt5}{2}b=1$$

$$\frac12(a+b)+\frac{\sqrt5}{2}(a-b)=1$$

$$\frac{\sqrt5}{2}(a-b)=\frac12$$

$$\begin{cases} a+b=\frac{\sqrt5}{\sqrt5} \\ a-b=\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$a=\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5} \quad b=\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}$

ולכן, $f(n)=\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$ לכל n

(3) נסמן ב $g(n)$ את מספר המילים באורך n מהאותיות A,B,C שלא מופיע בהן הרצף CB (מותר שיופיע הרצף BC). יש למצוא ביטוי סגור עבור $g(n)$

$\boxed{\text{מילה באורך } n-1 \text{ ללא הרצף } CB}$ A מספר המילים שמתחילות ב-A: $g(n-1)$

$\boxed{\text{מילה באורך } n-1 \text{ ללא הרצף } CB}$ B מספר המילים שמתחילות ב-B: $g(n-1)$

$\boxed{\text{מילה באורך } n-1 \text{ ללא הרצף } CB \text{ שלא מתחילה ב-B}}$ C מספר המילים שמתחילות ב-C:

$g(n-1) - \underbrace{\text{מספר המילים באורך } n-1 \text{ ללא הרצף } CB \text{ שמתחילות ב-B}}_{g(n-2)}$

קיבלנו:
$$g(n) = 3g(n-1) - g(n-2)$$

$g(0) = 1$ - המילה הריקה

$g(1) = 3$

מכאן אפשר להגיע לביטוי סגור בשיטה המקובלת.

פתרון נוסף (מסורבל יותר):

פתיחת המילה

A	המשכים אפשריים	$g(n-1)$
B	המשכים אפשריים	$g(n-1)$
CA		$g(n-2)$
CCA		$g(n-3)$
$CCCA$		$g(n-4)$
$\vdots$		
$\underbrace{C\cdots C}_{n-2}A\underbrace{\ \ }_{\text{אות נוספת}}$		$g(1)$
$\underbrace{C\cdots C}_{n-2}CA$		$g(0)$
$\underbrace{C\cdots C}_{n-2}CC$		1

קיבלנו:
$$-\begin{cases} g(n) = 2g(n-1) + g(n-2) + \cdots + g(0) + 1 \\ g(n-1) = 2g(n-2) + g(n-3) + \cdots + g(0) + 1 \end{cases}$$
$$g(n) - g(n-1) = 2g(n-1) + g(n-2) - 2g(n-2)$$
$$g(n) = 3g(n-1) - g(n-2)$$